TEOREMI TOPOLOGICI STRANI E DIVERTENTI

Un Teorema non è mai divertente, ma lo possono essere i modelli esplicativi nel nostro spazio fisico mono, bi o tri dimensionale

dr.ing. Alberto Sacchi
Sviluppo Progetti Avanzati srl- R&D Dept.
ing.sacchi@alice.it

SINTESI (ABSTRACT)
Il presente scritto concerne una presentazione elementare ed intuitiva di alcuni noti Teoremi topologici e dei relativi esempi esplicativi aventi carattere divertente.
The present work concerns an elementary and intuitive presentation of some well-known topological theorems and explanatory examples having funny character .

PREMESSA (INTRODUCTION)
La formalizzazione matematica delle leggi naturali e delle loro cause comporta rigore concettuale, quantificazione dei fenomeni ad esse connessi, precisione descrittiva e sinteticità; per contro spesso porta ad una de-intuitività (almeno per i non addetti ai lavori) dei fenomeni e delle loro conseguenze.
Descrivere in linguaggio naturale le leggi della natura può generare fraintendimenti semantici e logici, mancanza di rigore concettuale e difficoltà nel quantificare cause ed effetti, ma permette di fornire risultati e dati in forma immediatamente comprensibile.
L'impiego di esempi condotti su modelli reali ed estremamente semplici può rendere ancora più evidente il contenuto concettuale di leggi, teorie o principi fisici.

Da www.fisicamente.net – **Il Teorema di Ricorrenza di Poincarè**

Tali considerazioni riferite a molti Teoremi topologici è ancor più valida quando i Teoremi stessi estendono la loro validità a spazi pluridimensionali del tutto estranei alla intuizione umana; per contro esempi elementari bi o tri dimensionali possono risultare sia intuitivi che fornire una comprensione dei teoremi anche per spazi di dimensione superiore.
Dei Teoremi stessi non viene fornita alcuna dimostrazione (peraltro reperibile su testi specialistici comunque citati in Bibliografia), per contro viene posta particolare

attenzione nell’evidenziare la stretta coerenza dei Modelli citati con il testo formale dei Teoremi corrispondenti.

TEOREMI TOPOLOGICI (TOPOLOGICAL THEOREMS)

Teorema del panino al prosciutto
Teorema di Stone-Turkey

Marshall Harvey Stone (New York, 8 aprile 1903 – Madras, 9 gennaio 1989) matematico statunitense, noto per i lavori relativi alle algebre boeliane, alle teorie dei gruppi , alla Meccanica Quantistica ed al Teorema di Stone –Weierstrass.

John Wilder Tukey (New Bedford, 16 giugno 1915 – New Brunswick, 26 luglio 2000) chimico, matematico e statistico statunitense, noto soprattutto per i suoi lavori sulla Fast Fourier Transform.

Il Teorema di Stone-Turkey afferma che:
dati n oggetti aventi forma, dimensione e posizione arbitraria in uno spazio ad n dimensioni esiste sempre un iperpiano di dimensione (n-1)in grado di bisecarli tutti contemporaneamente.

Il Teorema afferma l’esistenza ed unicità dell’iperpiano, ma non fornisce alcuna indicazione sulla sua posizione nell’iperspazio.

Si consideri un panino al prosciutto, oggetto tridimensionale (n=3) composto da 3 elementi (n = 3): due fette di pane ed una di prosciutto, ciascuna di forma arbitraria e, quindi, non perfettamente impilabili.
Sia dato poi un coltello con lama tanto sottile da potersi considerare bidimensionale (iperpiano avente dimensioni n-1 = 2).
Il Teorema di Stone-Turkey afferma che esiste sempre un taglio eseguito con tale coltello in grado di tagliare esattamente a metà le tre fette del panino.
L’affermazione appare elementarmente evidente se non di tiene conto che le tre fette non hanno dimensioni e spessore identici e che, quindi, un taglio normale al piano delle prima fetta e tale da bisecarla, sicuramente non potrà bisecare le fette rimanenti.

Ma ancora più strano appare il caso in cui le tre fette (pane e prosciutto) siano disposte casualmente (FIG 1) come previsto dal Teorema (posizione arbitraria in uno spazio n dimensionale).

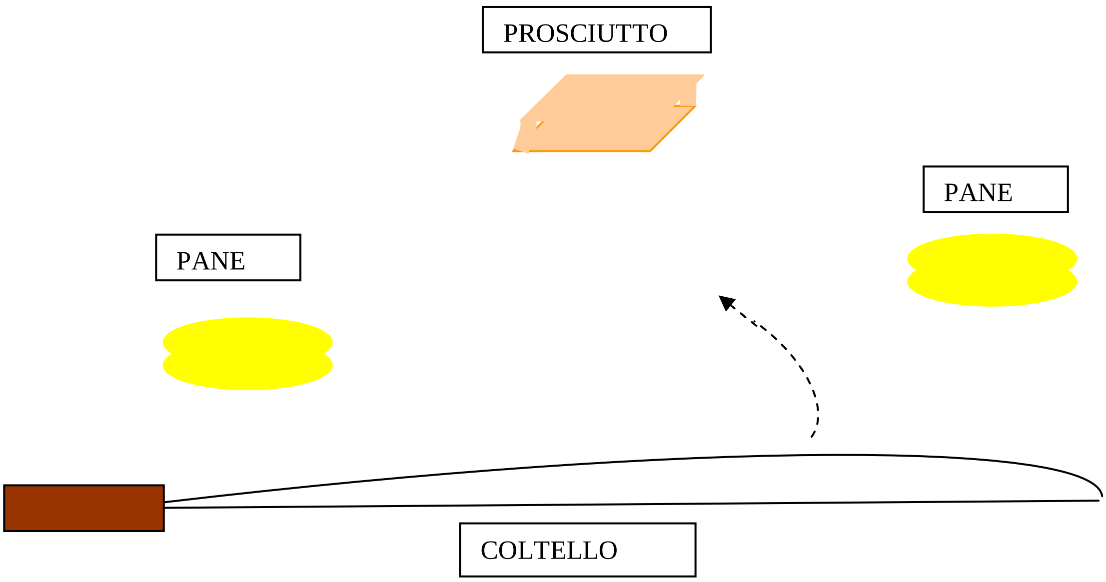

FIG 1

E’ necessario considerare che le fette sono tridimensionali ed il taglio può essere effettuato nella direzione del loro spessore.

Ancora più evidente il caso in cui lo spazio considerato sia bidimensionale; caso del **Teorema delle Frittelle alla marmellata (**FIG 2)

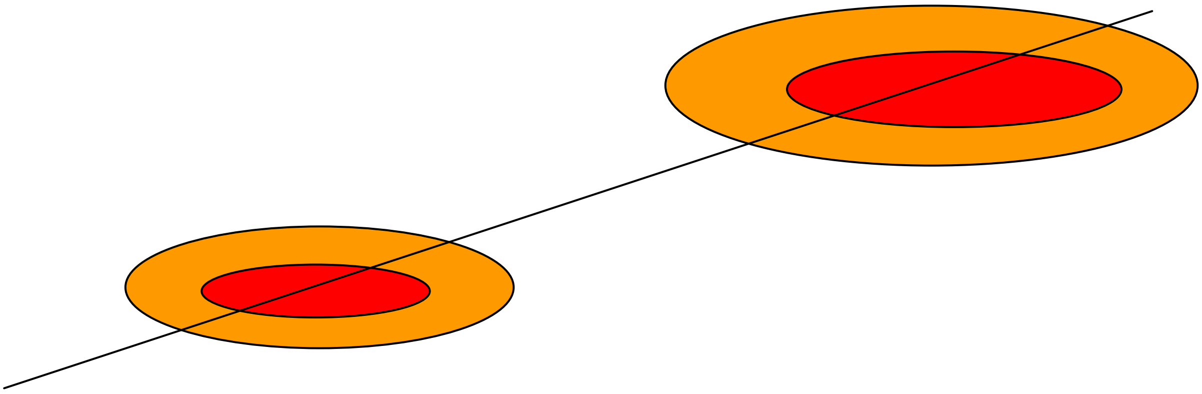

FIG 2

Lo spazio considerato ha dimensione n= 2, gli elementi (frittelle) sono n=2, il taglio viene effettuato con un coltello di dimensioni n-1 = 2-1=1 cioè con una retta monodimensionale.
Entrambe le frittelle sono tagliate esattamente a metà, cosi come deve risultare bisezionata la marmellata.

Teorema della palla pelosa
Teorema di Luitzen Brouwer

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (Overschie, 27 febbraio 1881 – Blaricum, 2 dicembre 1966) matematico olandese, fondatore della "scuola intuizionistica"

Il Teorema di Brouwer afferma che:
Sia S una superficie sferica bidimensionale e sia f una funzione continua che associa ogni punto P di S ad un vettore tangente ad S in P, allora esiste almeno un punto Q di S tale che f(Q) = 0

Sia R una sfera tridimensionale ed S la sua superficie e P un punto di S; in P vi sarà allora un vettore tangente a S (FiIG 3).
Tal situazione può essere ripetuta per ogni punto P di S salvo che per i “Poli”, dove viene ad annullarsi il vettore V.

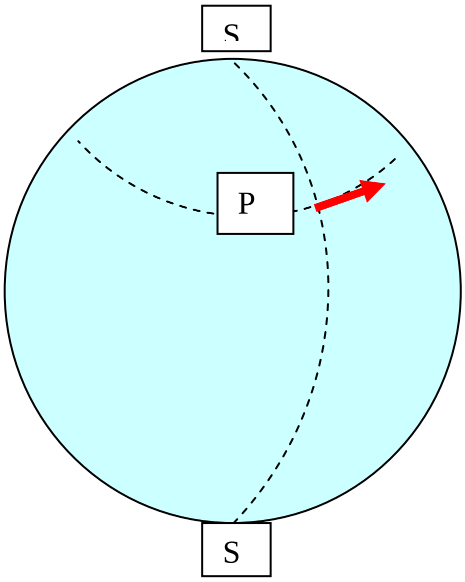

FIG. 3

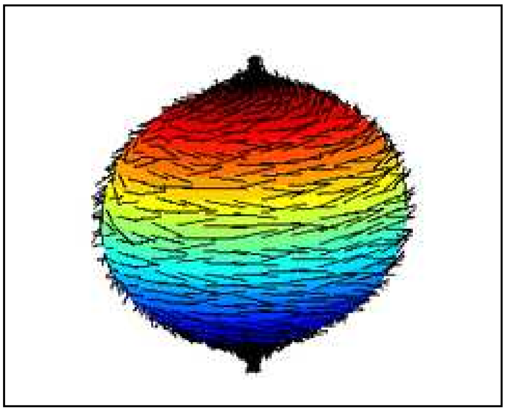

Figura da Wikipedia

Tale situazione viene spesso ironizzata con l'espressione: "non è possibile pettinare completamente una palla pelosa"

Teorema delle vacanze al sole
Teorema di Borsuk-Ulam

Stanisław Ulam (Leopoli, 13 aprile 1909 – Santa Fe, 13 maggio 1984) matematico polacco. Partecipò al progetto Manhattan ed al Teller–Ulam per le armi nucleari e la propulsione nucleare ad impulso. In area matematica è noto per i suoi lavori in topologia algebrica.

Karol Borsuk (Varsavia, 8 maggio 1905 – Varsavia, 24 gennaio 1982) matematico polacco noto per i suoi lavori in topologia e per l'invenzione del gioco Super Farmer.

Il teorema di Borsuk-Ulam asserisce che:

per ogni funzione f continua operante sui punti di una superficie sferica n-dimensionale in uno spazio euclideo a n *dimensioni, esistono due punti* a *e* b *diametralmente opposti tali che f(a) = f(b)* **.**

Ne segue che in due dimensioni (cioè sulla superficie della sfera terrestre tridimensionale), scelto un luogo con clima ottimale [funzione f = f (temperatura, umidità, pressione, irraggiamento UV, ecc.)] ove trascorrere la vacanza, è possibile trovare un luogo diametralmente opposto (cioè agli antipodi) avente il medesimo clima (nel caso la disponibilità del primo luogo scelto fosse esaurita).

Teorema della mela bacata

Congettura di Poincarè

Jules Henri Poincaré (Nancy, 29 aprile 1854 – Parigi, 17 luglio 1912) matematico, fisico e filosofo francese, viene considerato *l'ultimo universalista* in quanto esperto in quasi tutte le aree scientifiche

La congettura di Poincaré ipotizza che :

Ogni 3-varietà semplicemente connessa chiusa (ossia compatta e senza bordi) è omeomorfa a una sfera tridimensionale

E' opportuno precisare che dal 2003 la Congettura è divenuta un Teorema a fronte della dimostrazione dell'enunciato fornita da Grigorij Jakovlevič Perel'man.

Onde chiarire l'enunciato formale, in vero piuttosto criptico, è necessario illustrare operativamente alcune definizioni.

- omeomorfismo: due spazi topologici X e Y sono omeomorfi se esiste una funzione f che porti ogni punto A di X in un punto B di Y ($f: A \rightarrow B$) e tale che f^{-1} dia ($f^{-1}: B \rightarrow A$).

  Sinteticamente due spazi sono omeomorfi se esiste una corrispondenza biunivoca tra i loro punti.

L'idea base intuitiva è quella di deformazione senza strappi o buchi e può essere illustrata in uno spazio 2-dimensionale (piano) da una figura qualsiasi disegnata su di una lastra di gomma elastica. Deformando senza lacerazioni la lastra, la figura che si ottiene è omeomorfa a quella iniziale (FiIG 4)

- In uno spazio tridimensionale l'idea intuitiva è quella di un corpo in materiale plastico (plastilina, pongo, ecc.) deformabile senza strappi o buchi (FIG 4)

- compattezza: dato un punto x_0 di una spazio topologico X ed un intorno arbitrario (piccolo a piacere) σ di x_0 lo spazio di X è compatto se in σ si trova almeno un punto x di X .

Intuitivamente ed operativamente tale definizione coincide con la caratteristica di un corpo sia bi che tridimensionale di poter tracciare sulla sua superficie una linea chiusa riducibile ad un punto (FIG seguente).

figura da Wikipedia

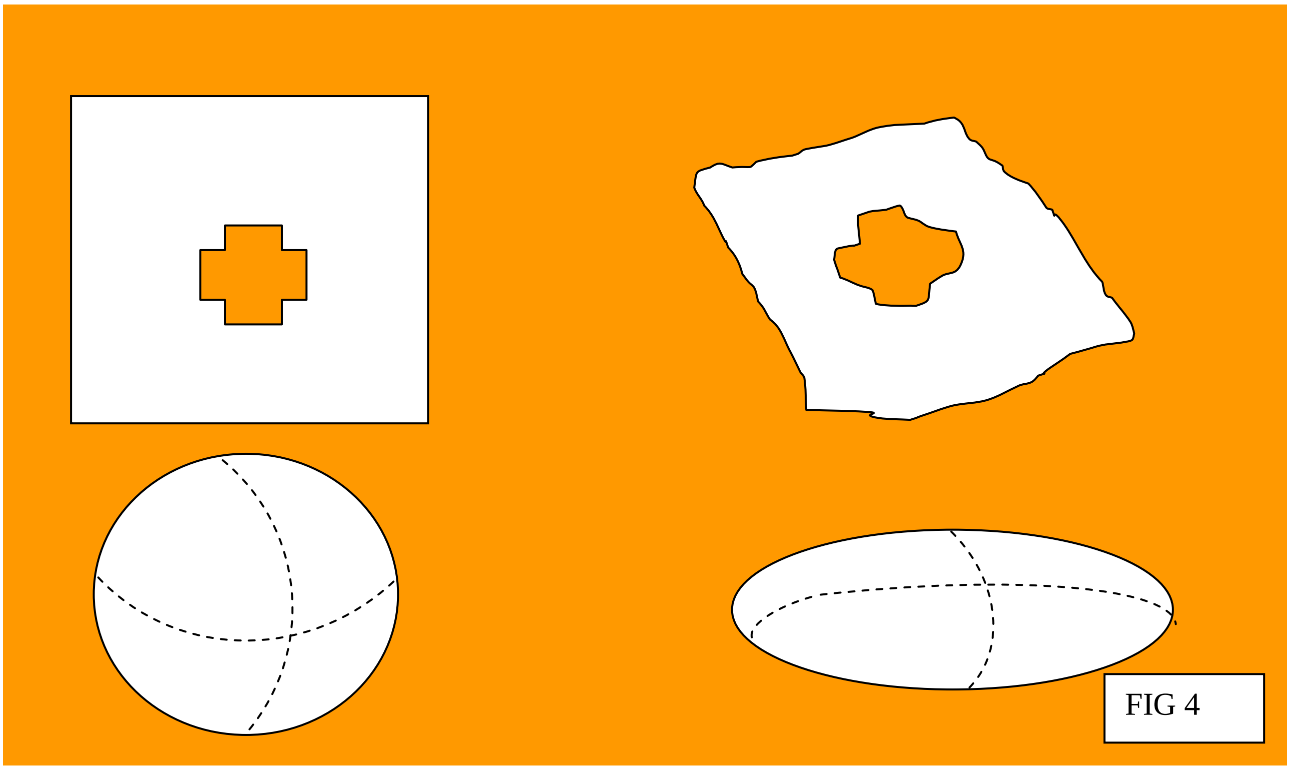

FIG 4

In uno spazio 3- dimensionale, una 2-varietà è semplicemente la superficie (compatta potendosi applicare la proprietà della mela senza baco) di una sfera immersa nel nostro spazio normale a 3 dimensioni.
In altri termini la superficie di una sfera priva di buchi (foro di baco) è una 2-varietà chiusa.

Può esser interessante dimostrare che una mela bacata (2-sfera con foro) è omeomorfa ad una superficie toroidale (FIG 6).

La congettura di Poincaré afferma che ogni superficie 2D (di una figura piana o di un solido tridimensionale) è omeomorfa a tale sfera e, sino a questo punto la dimostrazione esiste, ma Poincaré afferma <u>che ciò è vero anche per varietà 3 dimensionali immerse in uno spazio a 4 dimensioni.</u>

Nello spazio bidimensionale una verifica banale e facilmente illustrabile concerne l'omomorfismo tra un cerchio (superficie 2D piana) e la superficie di una sfera 3D che, come superficie è, ovviamente, una varietà 2D.

Anzitutto è necessario stabilire se un cerchio di raggio R privato della propria circonferenza sia una varietà *compatta senza bordi* (come recita la congettura di Poincaré).
Dalla definizione operativa di compattezza appare sempre possibile tracciare una linea chiusa intorno ad un punto interno contraibile in un punto; ciò è possibile solo

per ogni punto non appartenente alla circonferenza poiché, in tale caso, la linea chiusa uscirebbe dall'area del cerchio (FIG 4B).

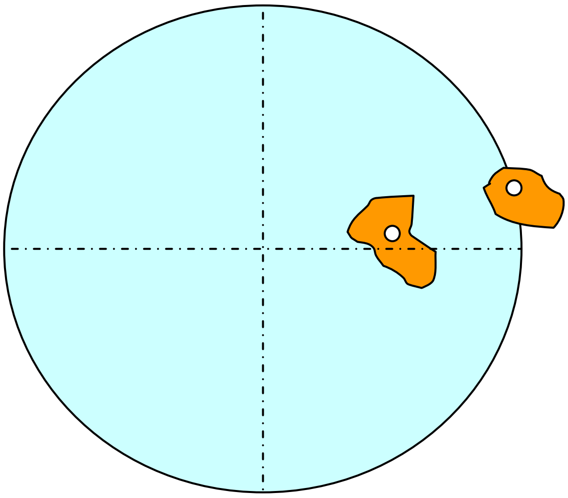

FIG 4B

Sia r_x ($0 < r_x < R$) un generico raggio di un cerchio di raggio R e sia $C_x = 2\pi r_x$ la relativa circonferenza; ad essa corrisponderanno due circonferenze equatoriali (2 paralleli di raggio r_x) di una sfera di raggio R.
I punti di una di esse corrisponderanno alla circonferenza del cerchio per $0 < \alpha < \pi$ mentre la seconda per i punti del cerchio compresi tra π e 2π.
Facendo variare r_x da 0 ad R ed α da 0 a 2π in modo continuo si otterrà la superficie sferica (FIG 5) .

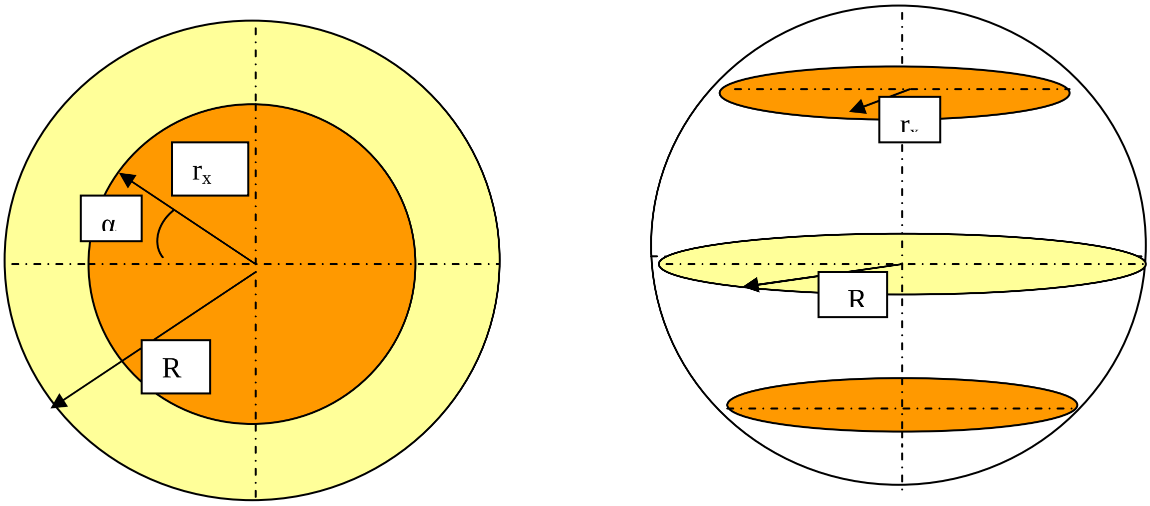

FIG 5

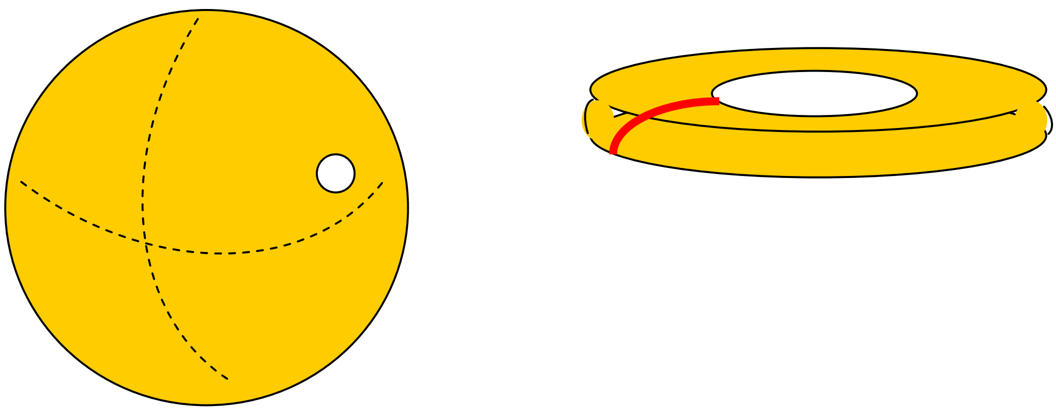

FIG 6

BLIOGRAFIA

- Steinhaus, Hugo & others (1938). "A note on the ham sandwich theorem". *Mathesis Polska* **9**, 26–28.
- Stone, A. H. & Tukey, J. W. (1942). "Generalized "sandwich" theorems". *Duke Mathematical Journal* **9**, 356–359.
- Byrnes G.B., Cairns G. & Jessup, B. (2001). Left-overs from the Ham-Sandwich Theorem *Amer. Math. Monthly* **108** 246–9
- K. Borsuk, *Drei Sätze über die* n*-dimensionale euklidische Sphäre*, *Fund. Math.*, **20** (1933)

- George G. Szpiro: *L'Enigma di Poincaré* (titolo originale: *Poincaré's Prize*) Apogeo 2008
- J. Morgan, G. Tian - Ricci flow and Poincaré Conjectura – *Math*/067607