

ANNALES DE L'I. H. P.

E. FERMI

La théorie du rayonnement

Annales de l'I. H. P., tome 1, n° 1 (1930), p. 53-74.

http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1930__1_1_53_0

© Gauthier-Villars, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. », implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

La théorie du rayonnement

PAR

E. FERMI

La liaison entre la théorie quantique et la théorie ondulatoire de la lumière, qui a semblé longtemps impossible, a été récemment établie, surtout grâce à un travail de DIRAC dans lequel celui-ci examine les relations entre un électron capable d'absorber ou d'émettre de la lumière, et le rayonnement lumineux.

Le point de départ du travail de DIRAC est assez simple : au lieu de considérer l'atome et la radiation comme deux systèmes, il les considère comme un système unique dont l'énergie est la somme de l'énergie de l'atome, de l'énergie du champ et d'un troisième terme petit vis-à-vis des deux autres et représentant l'énergie due au couplage de l'atome et du champ électromagnétique. Si on négligeait ce dernier terme cela reviendrait à supposer l'atome et le champ complètement indépendants : il ne pourrait y avoir d'échange d'énergie entre les deux ; c'est la présence de ce terme qui permet aux échanges d'énergie de s'effectuer.

Prenons une comparaison mécanique simple : un pendule M oscillant librement représentera notre atome. Une corde AB pouvant effectuer des oscillations transversales représentera la radiation électromagnétique.

Si le pendule et la corde sont isolés, leurs oscillations ne pourront naturellement pas réagir. Relions maintenant le pendule M à un point de la corde par un fil très élastique et très léger ; ce fil va évidemment

au début changer très peu les mouvements du pendule et de la corde mais pourra à la longue produire des changements importants. Supposons qu'à l'instant initial la corde oscille, le pendule étant immobile; par l'intermédiaire du fil le pendule va recevoir de petites impulsions dont les périodes sont les périodes propres de la corde. Si aucune des périodes propres de la corde n'est égale (ou très voisine) à la période propre du pendule, l'amplitude de l'oscillation du pendule restera toujours petite; si au contraire une période propre de la corde se trouve égale à celle du pendule, celui-ci finira par prendre une oscillation de grande amplitude; c'est ce qui correspond à l'absorption de la radiation par l'atome.

On verrait de même le cas d'émission de radiation par l'atome: la corde est d'abord immobile et le pendule oscille; après quelque temps les harmoniques de la corde, dont les fréquences sont très voisines de celle du pendule oscillant, se trouvent amplifiées.

Revenons maintenant à l'étude de l'atome et du champ de radiations et cherchons quelles sont les coordonnées définissant l'état du système. Si l'atome contient un seul électron, il sera défini par ses coordonnées cartésiennes x, y, z , ou bien par le vecteur q dont x, y, z sont les composantes. Le champ électromagnétique pourrait être défini par les valeurs du potentiel scalaire et du potentiel vecteur en chaque point de l'espace, mais cette représentation a divers inconvénients et nous aurons recours à une autre représentation beaucoup plus commode. Nous allons considérer le champ situé dans une portion de l'espace de volume Ω et limitée par des parois parfaitement réfléchissantes. Nous ferons finalement grandir indéfiniment le volume Ω de façon à obtenir à la limite la radiation remplissant tout l'espace.

La radiation électromagnétique remplissant un espace de volume fini peut s'analyser grâce à un développement en série de FOURIER par rapport à ses harmoniques propres.

Pour revenir à l'exemple de la corde de longueur a , l'ordonnée y d'un point M peut s'exprimer par

$$y = \sum_n a_n \sin 2\pi \frac{n}{a} x$$

et la position de la corde à un instant quelconque est définie ainsi par l'expression des a_n en fonction du temps; remarquons que pour des oscillations libres de la corde les a_n sont des fonctions sinusoïdales

LA THÉORIE DU RAYONNEMENT

du temps. De même le potentiel vecteur U , en un point M de la radiation pourra se décomposer en une série de FOURIER $U = \sum u_s$, avec

$$(1) \quad U_s = A_s u_s(t) \sin \left[\frac{2\pi\nu_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right]$$

ou $\alpha_s q$ représente le produit scalaire des vecteurs α_s et q ; q est un vecteur de composantes x, y, z , coordonnées du point M ; α_s est un vecteur unitaire donnant la direction de l'onde stationnaire considérée; β_s représente une phase. A_s est un vecteur unitaire qui donne la direction de U_s ; dans le cas des ondes transversales A_s est perpendiculaire à α_s .

Enfin U_s est un facteur fonction du temps seulement, définissant la grandeur du potentiel vecteur aux ventres de l'onde stationnaire (en ces points en effet le facteur sinus a pour valeur un). Nous prendrons les u_s comme coordonnées définissant la radiation électromagnétique. Dans le cas des vibrations libres du champ les u_s sont des fonctions sinusoïdales du temps

$$u_s = K_s \frac{\sin}{\cos} 2\pi\nu_s t.$$

En résumé le potentiel vecteur U en un point défini par q est donné par

$$(2) \quad U = \sum A_s u_s \sin \left(\frac{2\pi\nu_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right)$$

la somme devant être étendue à toutes les oscillations propres du domaine considéré. Ces oscillations sont en nombre infini, mais dénombrables tant que Ω reste fini. Quand Ω grandit indéfiniment les valeurs ν_s tendent vers une suite continue et à la limite le nombre dN d'oscillations propres dont les fréquences sont comprises entre ν et $\nu + d\nu$ est donné par

$$(3) \quad dN = \frac{8\pi}{c^3} \Omega \nu^2 d\nu.$$

Cette expression nous servira plus tard.

Calculons la valeur de l'énergie électromagnétique du champ défini par son potentiel vecteur (2).

Les formules classiques

$$H = \text{rot } U \quad E = -\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t}$$

nous donnent pour les champs magnétique et électrique

$$(4) \quad \begin{cases} \mathbf{H} = \sum_s \frac{2\pi v_s}{c} [\alpha_s \times \mathbf{A}_s] u_s \cos \left[\frac{2\pi v_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right] \\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \sum_s \mathbf{A}_s \dot{u}_s \sin \left[\frac{2\pi v_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right] \end{cases}$$

où $[\alpha_s \times \mathbf{A}_s]$ représente le produit vectoriel des vecteurs α_s et \mathbf{A}_s .

L'énergie électromagnétique étendue à tout l'espace Ω sera

$$W_e = \Omega \frac{\overline{\mathbf{E}^2} + \overline{\mathbf{H}^2}}{8\pi}$$

les quantités surlignées désignant des valeurs moyennes.

En calculant $\overline{\mathbf{E}^2}$ et $\overline{\mathbf{H}^2}$ qui sont des sommes par rapport à s on obtient des termes carrés, et des termes rectangles dont la moyenne est nulle. En tenant compte de ce que $\overline{\sin^2}$ et $\overline{\cos^2}$ ont pour valeur $\frac{1}{2}$ et en se souvenant que les vecteurs α_s et \mathbf{A}_s sont orthogonaux (ondes transversales) on obtient

$$\overline{\mathbf{H}^2} = \sum_s \frac{2\pi^2 v_s^2}{c^2} u_s^2 \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{E}^2} = \frac{1}{2c^2} \sum_s \dot{u}_s^2$$

d'où l'énergie électromagnétique

$$(5) \quad W_e = \frac{\Omega}{8\pi c^2} \sum_s \left(\frac{1}{2} \dot{u}_s^2 + 2\pi^2 v_s^2 u_s^2 \right).$$

Nous pourrions donner à cette expression la forme Hamiltonienne en considérant la variable v_s conjuguée de u_s

$$v_s = \frac{\partial W_e}{\partial \dot{u}_s} = \frac{\Omega}{8\pi c^2} \dot{u}_s$$

W_e s'écrira alors

$$(6) \quad W_e = \sum_s \left[\frac{8\pi c^2}{\Omega} \frac{v_s^2}{2} + \frac{\Omega}{8\pi c^2} 2\pi^2 v_s^2 u_s^2 \right].$$

En écrivant les équations canoniques

$$\dot{u}_s = \frac{\partial W_e}{\partial v_s}; \quad \dot{v}_s = -\frac{\partial W_e}{\partial u_s}$$

nous devons obtenir l'équation des vibrations libres de l'espace Ω .

En effectuant on trouve bien

$$\dot{u}_s + 4\pi^2 v_s^2 u_s = 0$$

qui donne pour u_s une fonction périodique de fréquence ν_s . Dans l'équation (6) remplaçons les variables canoniques u_s et v_s par deux nouvelles variables canoniques q_s et p_s définies par

$$(7) \quad u_s = \sqrt{\frac{8\pi c^2}{\Omega}} q_s; \quad v_s = \sqrt{\frac{\Omega}{8\pi c^2}} p_s.$$

L'équation (6) deviendra alors

$$(8) \quad W_e = \sum_s \left[\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2 \right]$$

Hamiltonien identique à celui d'oscillateurs (définis par l'indice s) indépendants, de masses 1 et de fréquences ν_s .

Avec ces nouvelles variables l'expression (2) du potentiel vecteur deviendra

$$(9) \quad U = \sqrt{\frac{8\pi c^2}{\Omega}} \sum_s A_s q_s \sin \left(\frac{2\pi \nu_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right).$$

Il nous reste à calculer l'Hamiltonien de l'atome situé dans le champ au point défini par q .

Cet Hamiltonien W_a est donné par la relation relativiste

$$(10) \quad 0 = -\frac{1}{2m} \left\{ \left(mc + \frac{W_a - eV}{c} \right)^2 - \left(p - \frac{eU}{c} \right)^2 \right\} + \frac{mc^2}{2}.$$

Nous négligerons dans son développement les termes en $\frac{1}{c^2}$: ils représentent des corrections relativistes que nous voulons négliger, l'Hamiltonien déjà écrit devrait sans quoi être aussi affecté de corrections dans le sens donné par la théorie de l'électron tournant de DIRAC.

La relation (10) ainsi développée donne

$$(11) \quad W_a = \frac{p^2}{2m} + eV - \frac{e}{mc} (U \cdot p).$$

L'Hamiltonien complet de l'atome et du champ réagissant l'un sur l'autre s'obtiendra en ajoutant à l'expression (8) (Hamiltonien du champ) l'expression (11) dans laquelle U est remplacé par son expression (9) On obtient ainsi l'Hamiltonien

$$(12) \quad H = \frac{p^2}{2m} + eV + \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2 \right) - \frac{e}{m} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s (A_s \cdot p) q_s \sin \left\{ \frac{2\pi \nu_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right\}.$$

Les deux premiers termes représentent l'Hamiltonien de l'atome seul, le troisième terme l'Hamiltonien de la radiation seule (ou sans interaction de l'atome et du champ). Le dernier terme qui est petit représente précisément l'interaction de l'atome et du champ. Dans certaines applications, comme la théorie de la dispersion ou de l'effet COMPTON, l'approximation qui nous a permis de passer de (10) à (11) n'est plus légitime : dans le développement de $(\dot{p} - \frac{eU}{c})^2$ il faut alors conserver le terme $\frac{e^2 U^2}{c^2}$ dans lequel U est remplacé par son expression (9). Cela nous conduit donc à ajouter à l'Hamiltonien (12) H, le terme

$$(13) \quad H_2 = \frac{4\pi e^2}{m\Omega} \sum_{s, \sigma} (A_s \cdot A_\sigma) q_s q_\sigma \sin \left\{ \frac{2\pi\nu_s}{c} \alpha_s \cdot q + \beta_s \right\} \sin \left\{ \frac{2\pi\nu_\sigma}{c} \alpha_\sigma \cdot q + \beta_\sigma \right\}$$

Mais en général il est inutile de tenir compte de H_2 .

Il est important de remarquer que la théorie classique de la radiation électromagnétique peut se déduire de l'Hamiltonien (12) : Ecrivons en effet les équations canoniques

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = - \frac{\partial H}{\partial q_s}$$

elles donnent

$$\dot{q}_s = \dot{p}_s \quad \text{et} \quad \dot{p}_s = -4\pi^2\nu_s^2 q_s + \frac{e}{m} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} (A_s \cdot \dot{p}) \sin \left\{ \frac{2\pi\nu_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right\}$$

ou en chassant \dot{p}_s

$$(14) \quad \ddot{q}_s + 4\pi^2\nu_s^2 q_s = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} (A_s \cdot \dot{p}) \sin \left\{ \frac{2\pi\nu_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right\}$$

qui représente les oscillations forcées d'un oscillateur de fréquence ν_s . En particulier quand $\dot{p} = 0$, c'est-à-dire quand l'électron de l'atome considéré est immobile, l'équation (14) se réduit bien à une oscillation libre.

Pour déduire de (14) la formule de LARMOR classique donnant l'énergie rayonnée par l'atome, nous ferons les trois hypothèses suivantes :

1° Que l'électron reste voisin de l'origine des coordonnées : $q \cong 0$ de façon qu'on puisse remplacer $\sin \left[\frac{2\pi\nu_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right]$ par $\sin \beta_s$. Cette hypothèse, également nécessaire pour la démonstration classique, revient à dire que les dimensions de l'atome sont petites vis-à-vis

de la longueur d'onde de la radiation émise, et elle est dans le plus grand nombre de cas largement satisfaite.

2° Qu'à l'instant initial il n'y a pas de radiation : $q_s(0) = \dot{q}_s(0) = 0$

3° Enfin nous supposons que le mouvement de l'électron émissif peut s'écrire en série de FOURIER de sorte que sa quantité de mouvement p s'écrive

$$p = mv = m \sum_a v_a \sin(2\pi\nu_a t + \beta_a).$$

On voit alors facilement que les énergies rayonnées par les diverses composantes a sont indépendantes ; pour calculer celle correspondant à la $a^{\text{ième}}$ il nous suffit de poser $p = m v_a \sin(2\pi\nu_a t + \beta_a)$.

L'équation (14) peut alors s'écrire en tenant compte de l'hypothèse 1°

$$(15) \quad \ddot{q}_s + 4\pi^2\nu_s^2 q_s = c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} (A_s \cdot v_a) \sin \beta_s \cdot \sin(2\pi\nu_a t + \beta_a).$$

Son intégrale générale est

$$(16) \quad q_s = F \sin 2\pi\nu_s t + G \cos 2\pi\nu_s t + e \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \frac{(A_s \cdot V_a) \sin \beta_s}{4\pi^2(\nu_s^2 - \nu_a^2)} \sin(2\pi\nu_a t + \beta_a).$$

L'hypothèse 2° relative aux conditions initiales définit les constantes F et G ; on trouve

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = -\frac{\nu_a}{\nu_s} e \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \frac{(A_s \cdot V_a) \sin \beta_s}{4\pi^2(\nu_s^2 - \nu_a^2)} \cos \beta_a ; \\ G = -e \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \frac{(A_s \cdot V_a) \sin \beta_s}{4\pi^2(\nu_s^2 - \nu_a^2)} \sin \beta_a. \end{array} \right.$$

Ces expressions montrent que q_s ne prend une valeur importante que pour les fréquences ν_s voisines de ν_a .

L'énergie accumulée dans la $s^{\text{ième}}$ composante de la radiation est donnée par (8)

$$w_s = \frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2\nu_s^2 q_s^2$$

qu'on peut écrire avec une approximation suffisante

$$(18) \quad w_s = 4\pi^2\nu_s^2 \overline{q_s^2}$$

car dans un oscillateur harmonique on a

$$\frac{1}{2} \overline{p_s^2} = 2\pi^2\nu_s^2 \overline{q_s^2}.$$

L'intégrale générale (16), compte tenu des conditions (17) et du fait que ν_s est assez voisin de ν_a , pour pouvoir écrire

$$\frac{\nu_a}{\nu_s} = 1 \quad \text{et} \quad \nu_s^2 - \nu_a^2 = 2\nu_a(\nu_s - \nu_a),$$

s'écrit

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_s = e\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \frac{(A_s \cdot V_a) \sin \beta_s}{4\pi^2(\nu_s^2 - \nu_a^2)} \left\{ \sin(2\pi\nu_a t + \beta_a) - \sin(2\pi\nu_s t + \beta_a) \right\} \\ \text{ou} \\ q_s = -2e\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \frac{(A_s \cdot V_a) \sin \beta_s}{8\pi^2\nu_a} \cos(\pi(\nu_s + \nu_a)t + \beta_a) \frac{\sin \pi(\nu_s - \nu_a)t}{\nu_s - \nu_a}. \end{array} \right.$$

Dans cette expression le seul terme variant rapidement avec le temps est $\cos[\pi(\nu_s + \nu_a)t + \beta_a]$ et dans (18) nous ne devons prendre la moyenne que par rapport à ce terme. L'expression (18) devient alors, en tenant toujours compte que $\nu_a \neq \nu_s$:

$$(20) \quad W_s = \frac{e^2}{\pi\Omega} (A_s \cdot V_a)^2 \sin^2 \beta_s \frac{\sin^2 \pi(\nu_s - \nu_a)t}{(\nu_s - \nu_a)^2}.$$

C'est l'énergie transmise par la radiation ν_a à la radiation ν_s . L'énergie totale fournie est la somme par rapport à s des énergies w_s . Or, le nombre de fréquences propres contenues dans l'intervalle $d\nu_s$ est donné par

$$dN = \frac{8\pi}{c^3} \Omega \nu_s^2 d\nu_s.$$

Ces composantes vibrent avec des directions (définies par A_s) et des phases β_s uniformément réparties, c'est-à-dire que

$$\overline{A_{sx}^2} = \frac{1}{3}, \quad \overline{A_{sy}^2} = \frac{1}{3}, \quad \overline{A_{sz}^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \overline{A_{sx}A_{sy}} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\sin^2 \beta_s} = \frac{1}{2}.$$

L'énergie fournie aux radiations de fréquences comprises entre ν_s et $\nu_s + d\nu_s$ sera donc

$$dW = \frac{8\pi}{c^3} \Omega \nu_s^2 d\nu_s \frac{c^2}{\pi\Omega} \cdot \frac{\nu_a^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \pi(\nu_s - \nu_a)t}{(\nu_s - \nu_a)^2}.$$

En tenant toujours compte du fait que $\nu_a \neq \nu_s$ on peut écrire

$$(21) \quad dW = \frac{4}{3} \frac{e^2}{c^3} \nu_a^2 \nu_s^2 \frac{\sin^2 \pi(\nu_s - \nu_a)t}{(\nu_s - \nu_a)^2} d\nu_s.$$

LA THÉORIE DU RAYONNEMENT

L'énergie totale émise par la radiation ν_a s'obtient en intégrant

$$W = \frac{4}{3} \frac{e^2}{c^3} \nu_a^3 v_a^2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \pi(\nu_s - \nu_a)t}{(\nu_s - \nu_a)^2} d\nu_s.$$

Intégration facile si on se souvient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 qx}{x^2} dx = \pi q$$

et en remarquant que par rapport à la nouvelle variable $\nu_s - \nu_a$ on peut sans erreur sensible prendre l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$.

L'intégrale cherchée a la valeur

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \pi(\nu_s - \nu_a)t}{(\nu_s - \nu_a)^2} d\nu_s = \pi^2 t$$

d'où l'expression finale de W

$$(22) \quad W = \frac{4\pi^2 e^2 \nu_a^2 v_a^2 t}{3c^3}.$$

Pour obtenir la formule habituelle de LARMOR, calculons l'accélération Γ_a correspondant à la $a^{\text{ième}}$ composante du mouvement de l'atome M_a .

$$\Gamma_a = \frac{d}{dt} [v_a \sin (2\pi\nu_a t + \beta_a)] = 2\pi\nu_a v_a \cos (2\pi\nu_a t + \beta_a)$$

d'où

$$\overline{\Gamma_a^2} = 2\pi^2 \nu_a^2 v_a^2.$$

L'équation (22) donne la formule classique de LARMOR

$$(23) \quad \frac{W}{t} = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{\Gamma_a^2}$$

donnant l'énergie rayonnée par unité de temps.

Nous allons maintenant utiliser l'Hamiltonien (12) non plus avec les méthodes classiques, mais avec celles de la mécanique ondulatoire. Or l'Hamiltonien H peut s'écrire

$$H = H_0 + \mathcal{H}$$

où

$$(24) \quad H_0 = \frac{p^2}{2m} + eV + \sum_s' \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2 \right)$$

représente ce qu'on obtiendrait si on ne tenait pas compte de l'interaction de l'atome et de la radiation, et \mathcal{H} représente le terme complémentaire

$$(25) \quad \mathcal{H} = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum'_s q_s \sin \left\{ \frac{2\pi\nu_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right\} \cdot (A_s \cdot p).$$

On sait que pour déduire de l'Hamiltonien H d'un système quelconque, l'équation de SCHRÖDINGER correspondante, il suffit de considérer

$$H(q_k, p_k)$$

comme un opérateur, l'équation de SCHRÖDINGER étant donnée par

$$(26) \quad H\left(q_k, -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}\right) \Psi = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

On peut chercher les solutions de (26) de la forme

$$\Psi = u e^{\frac{2\pi i}{\hbar} E t}$$

On trouve que u est alors donné par

$$(27) \quad H\left(q_k, -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}\right) u(q) = E u(q).$$

La fonction u ne dépend pas du temps et l'équation n'a de solutions régulières dans tout le champ des variables que pour une suite discrète de valeurs de E , soient

$$E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$$

Les solutions correspondantes de (27) forment une suite orthogonale, que nous pouvons normaliser. Soient $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$ ces solutions; on a donc

$$\int u_i u_k dq = \delta_{ik} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta_{ik} = 1 & \text{si } i = k \\ \delta_{ik} = 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

Toute combinaison linéaire des solutions

$$\Psi_k = u_k e^{\frac{2\pi i}{\hbar} E_k t}$$

sera évidemment solution de l'équation générale (26). Nous écrivons donc la solution de (26) sous la forme

$$\Psi = \sum'_k a_k u_k e^{\frac{2\pi i}{\hbar} E_k t},$$

les a_k étant des constantes en général complexes.

Si nous voulons imposer à Ψ la condition habituelle

$$\int |\Psi|^2 dq = 1$$

nous devons imposer aux constantes a_k la condition

$$(28) \quad \sum_k |a_k|^2 = 1 \quad \text{ou} \quad \sum_k a_k \tilde{a}_k = 1$$

le symbole \tilde{a}_k désignant la quantité conjuguée de a_k .

La signification physique des a_k est bien connue (principe de BORN) : le carré du module de a_k représente la probabilité pour qu'un observateur trouve le système dans le $k^{\text{ième}}$ état quantique. Considérons maintenant le système ayant l'Hamiltonien non perturbé

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + eV + \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2 \right)$$

H_0 est la somme de l'Hamiltonien de l'électron

$$(29) \quad \frac{p^2}{2m} + eV$$

et des Hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques de masse 1 de fréquences ν_s

$$(30) \quad \frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2.$$

Soit u_n (n est un entier quelconque) une fonction de SCHRÖDINGER pour l'Hamiltonien (29) et E_k la valeur propre correspondante, soient de même $u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_s}, \dots$ (n_1, n_2, \dots, n_s sont des entiers quelconques) des fonctions de SCHRÖDINGER pour les radiations 1, 2, ... s, \dots et $E_{n_1}, E_{n_2}, \dots, E_{n_s}, \dots$ les valeurs propres, tout produit

$$(31) \quad u_n u_{n_1} u_{n_2} \dots u_{n_s} \dots e^{\frac{2\pi i}{h} [E_n + E_{n_1} + \dots] t}$$

où n, n_1, n_2, \dots, n_s sont des entiers quelconques, sera solution de l'équation de SCHRÖDINGER, correspondant à l'Hamiltonien H_0 .

Les valeurs $E_{n_1}, \dots, E_{n_s}, \dots$ correspondant aux oscillateurs harmoniques sont connues :

$$E_{n_s} = h\nu_s \left(n_s + \frac{1}{2} \right).$$

En négligeant les constantes additives $\frac{1}{2}h\nu_s$ indépendantes de l'état quantique n_s le produit (31) peut s'écrire

$$u_n u_{n_1} \dots u_{n_s} \dots e^{\frac{2\pi i}{h} [E_n + h\nu_1 n_1 + \dots + h\nu_s n_s + \dots] t}.$$

La solution la plus générale de l'équation de SCHRÖDINGER pour l'Hamiltonien non perturbé sera encore une combinaison linéaire à coefficients constants

$$(32) \quad \sum_{n, n_1, \dots, n_s} a_{n n_1 n_2 \dots n_s} \dots u_n u_{n_1} \dots u_{n_s} \dots e^{\frac{2\pi i}{h} [E_n + h\nu_1 n_1 + \dots + h\nu_s n_s + \dots] t}.$$

Nous aurons la condition de normalisation

$$\sum |a_{n n_1 \dots n_s} \dots|^2 = 1.$$

La signification physique des a est la suivante : le carré du module de $a_{n n_1 \dots n_s}$ représentera la probabilité pour qu'on trouve l'électron dans l'état quantique n et les radiations 1, 2... s... dans les états $n_1 n_2 \dots n_s$. Si nous supposons par exemple que

$$a_{2138} \dots = 1$$

tous les autres a étant nuls, cela veut dire que l'atome est dans le deuxième état quantique et que les oscillateurs de radiation 1, 2, 3... sont excités par 1, 3, 8... quanta.

Nous allons maintenant tenir compte de l'interaction entre l'atome et la radiation. L'Hamiltonien du système sera alors $H_0 + \mathcal{H}$ et l'équation de SCHRÖDINGER

$$(H_0 + \mathcal{H})\Psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

qu'on peut écrire

$$(33) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - H_0 \Psi = \mathcal{H} \Psi.$$

Nous allons chercher à trouver des solutions de la forme (32)

$$(34) \quad \Psi = \sum a_{n n_1 \dots n_s} \dots u_n u_{n_1} \dots u_{n_s} \dots e^{\frac{2\pi i}{h} [E_n + h\nu_1 n_1 + \dots + h\nu_s n_s + \dots] t}.$$

mais où les a sont alors des fonctions à déterminer du temps. En se

souvenant que l'équation (33) sans second membre serait satisfaite par la forme (34) avec des a constants, on voit que l'équation (33) devient

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\hbar}{2\pi i} \sum \dot{a}_{nn_1 \dots n_s} \dots u_n u_{n_1} \dots u_{n_s} \dots e^{\frac{2\pi i}{\hbar} [E_n + \dots + h\nu_s + \dots] t} \\ & = \mathcal{H} \cdot \sum a_{nn_1 \dots n_s} \dots u_n u_{n_1} \dots e^{\frac{2\pi i}{\hbar} [E_n + \dots] t}. \end{aligned} \right.$$

Ne pas oublier que dans le second membre \mathcal{H} représente un opérateur. Il n'opérera pas sur les a fonctions du temps seul, ni sur le facteur exponentiel. Nous pourrions donc écrire, en remplaçant les n_s par des m_s sous le signe Σ du second membre pour faciliter les calculs ultérieurs

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\hbar}{2\pi i} \sum \dot{a}_{nn_1 \dots n_s} \dots u_n \dots u_{n_s} \dots e^{\frac{2\pi i}{\hbar} [E_n + \dots + h\nu_s + \dots] t} \\ & = \sum a_{mm_1 \dots m_s} \dots \mathcal{H}(u_n \dots u_{n_s} \dots) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} [E_n + \dots + h\nu_s + \dots] t}. \end{aligned} \right.$$

Pour résoudre multiplions les deux membres de cette égalité par

$$\frac{2\pi i}{\hbar} u_n u_{n_1} \dots u_{n_s} \dots e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} [E_n + h\nu_1 n_1 + \dots + h\nu_s n_s + \dots] t} dq_1 \dots dq_s \dots$$

et intégrons dans tout le champ des variables. Toutes les fonctions u étant normalisées le premier membre donne $a_n, \dots, n_1, \dots, n_s \dots$. Quant au second membre il peut s'écrire

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} & \dot{a}_{nn_1 \dots n_s} \dots = \frac{2\pi i}{\hbar} \sum_{mm_1 \dots m_s} a_{mm_1 \dots m_s} \dots \mathcal{H}_{nn_1 \dots n_s} \dots; m m_1 m_2 \dots m_s \dots \\ & e^{\frac{2\pi i}{\hbar} [E_m - E_n + h\nu_1(m_1 - n_1) + \dots + h\nu_s(m_s - n_s) \dots] t} \end{aligned} \right.$$

avec l'égalité

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathcal{H}_{nn_1 \dots n_s} \dots; m m_1 \dots m_s \dots \\ & = \iint \dots \int u_n u_{n_1} \dots u_{n_s} \dots \mathcal{H}(u_m u_{m_1} \dots u_{m_s} \dots) dq_1 \dots dq_s \dots \end{aligned} \right.$$

Dans le second membre on doit remplacer l'opérateur \mathcal{H} par son expression (25), augmentée, si cela devient nécessaire, du terme complémentaire (13).

En ne conservant que le terme (25)

$$\mathcal{H} = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s q_s \sin \left\{ \frac{2\pi\nu_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right\} (A_s \cdot p)$$

on voit que le seul opérateur différentiel est $(A_s \cdot \rho)$ qui portant sur le produit $u_m u_{m_1} \dots u_{m_2} \dots$ donne

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} (A_s \cdot \text{grad } u_m) u_{m_1} \dots u_{m_s} \dots$$

En définitive l'opérateur $\mathcal{H}(u_m u_{m_1} \dots u_{m_s} \dots)$ sera

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}(u_{m_1} \dots u_{m_s} \dots) = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{e}{m} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s q_s \\ \sin \left\{ \frac{2\pi v_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right\} (A_s \cdot \text{grad } u_m) u_{m_1} u_{m_2} \dots u_{m_s} \dots \end{array} \right.$$

En substituant dans (38) on obtient ainsi une somme de termes, faciles à calculer en remplaçant l'intégrale multiple par le produit des intégrales relatives à chaque paramètre. Calculons le $s^{\text{ième}}$ terme; c'est un produit d'intégrales. Pour le paramètre q nous avons l'intégrale

$$\int u_n \sin \left\{ \frac{2\pi v_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right\} \text{grad } u_m dq.$$

Nous poserons

$$(40) \quad P_{snm} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \int \sin \left\{ \frac{2\pi v_s}{c} (\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right\} u_n \text{grad } u_m dq.$$

Pour tous les autres paramètres sauf q_s on a les intégrales

$$(41) \quad \int u_{n_a} u_{m_a} dq_a = \begin{cases} 0 & \text{si } m_a \neq n_a \\ 1 & \text{si } m_a = n_a \end{cases}$$

à cause de l'orthogonalité des fonctions u .

Enfin pour le paramètre q_s on a :

$$(42) \quad \int q_s u_{n_s} u_{m_s} dq_s = \begin{cases} 0 & \text{si } m_s \neq n_s \pm 1 \\ \sqrt{\frac{\hbar}{8\pi^2 v_s}} \sqrt{n_s + 1} & \text{si } m_s = n_s + 1 \\ \sqrt{\frac{\hbar}{8\pi^2 v_s}} \sqrt{n_s} & \text{si } m_s = n_s - 1. \end{cases}$$

Ces dernières relations peuvent se vérifier facilement car les u sont les fonctions fondamentales d'un oscillateur de masse 1 de fréquence v_s . On peut aussi remarquer que le premier membre est l'élément $n_s m_s$ de la matrice représentant l'abscisse d'un oscillateur harmonique de masse 1 et de fréquence v_s . On sait que dans une telle matrice les seuls

termes non nuls sont ceux qui entourent la diagonale principale. Ils correspondent à $m_s = n_s \pm 1$ et ont la valeur indiquée dans (42).

On voit ainsi que $\mathcal{H}_{n_1 \dots n_s; m_1 \dots m_s \dots}$ est nul sauf si tous les m_i sont égaux aux n_i sauf un qui doit être tel que $m_s = n_s \pm 1$ et on a alors

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_{n, n_1, n_2 \dots n_s \dots n_x \dots; m_1 n_2 \dots n_s \pm 1; \dots n_x \dots} \\ = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{h}{\Omega \pi v_s}} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{n_s + 1} \\ \text{ou} \\ \sqrt{n_s} \end{array} \right\} (A_s \cdot P_{smn}) \end{array} \right.$$

ou l'on doit prendre $\sqrt{n_s + 1}$ ou $\sqrt{n_s}$ selon que $m_s = n_s + 1$ ou $m_s = n_s - 1$.

En portant dans (37) nous pouvons déduire \dot{a} .

Nous allons pousser les calculs dans le cas particulier important où les dimensions de l'atome sont petites vis à vis de la longueur d'onde de la radiation émise ; dans ces conditions l'expression du vecteur P_{smn} peut être simplifiée. On avait posé

$$(44) \quad P_{smn} = -\frac{h}{2\pi i} \sin \left\{ \frac{2\pi v_s}{c} (d_s \cdot q) + \beta_s \right\} u_n \text{ grad } u_m dq.$$

Nous écrivons ici avec l'approximation consentie

$$(45) \quad P_{smn} = -\frac{h}{2\pi i} \sin \beta_s \int u_n \text{ grad } u_m dq.$$

Mais on peut démontrer facilement que

$$(46) \quad -\frac{h}{2\pi i} \int u_n \text{ grad } u_m dq = 2\pi v_{mn} \int q u_n u_m dq.$$

L'équation (45) donne alors

$$(47) \quad P_{smn} = 2\pi v_{mn} \sin \beta_s Q_{nm}$$

en posant

$$(48) \quad Q_{nm} = \int q u_n u_m dq$$

Q_{nm} représentant l'élément n, m de la matrice Q donnant le rayon vecteur de l'électron.

Dans ces conditions l'équation (43) devient

$$(49) \quad \mathcal{H}_{n \dots n_s \dots; m \dots n_s \pm 1 \dots} = -\frac{2\pi i}{m} \sqrt{\frac{h}{\pi \Omega}} (A_s \cdot Q_{nm}) \frac{v_{mn}}{\sqrt{v_s}} \sin \beta_s \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{n_s + 1} \\ \text{ou} \\ \sqrt{n_s} \end{array} \right\}$$

En portant dans (37) on a immédiatement

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{a}_{n_1 \dots n_s \dots} &= \frac{4\pi^2 e}{\sqrt{\Omega h}} \sum_{m,s} \frac{\nu_{mn}}{\sqrt{\nu_s}} (A_s \cdot Q_{nm}) \\ \sin \beta_s &\left[\begin{aligned} + a_{n_1 \dots n_{s+1} \dots} \sqrt{n_s + 1} e^{2\pi i[\nu_{mn} + \nu_s]t} \\ + a_{n_1 \dots n_{s-1} \dots} \sqrt{n_s} e^{2\pi i[\nu_{mn} - \nu_s]t} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right.$$

C'est l'équation fondamentale ; connaissant les valeurs initiales des a on peut en déduire leurs valeurs à un instant quelconque par intégration.

Nous allons indiquer brièvement quelques exemples de phénomènes que l'on peut étudier grâce à cette théorie.

La recherche de la vie moyenne de l'atome dans un état donné, l'état 2 par exemple, s'obtient en cherchant l'expression de $|a_{2000\dots 0}|^2$ en fonction du temps.

Si à l'instant initial l'atome est effectivement dans l'état 2

$$a_{2000\dots 0} = 1 \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

connaissant les valeurs de a pour $t = 0$, nous pouvons déduire des équations (50) la valeur des a pour t quelconque. On trouve ainsi

$$|a_{200\dots 0}|^2 = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

qui nous démontre que la probabilité que l'atome soit dans l'état 2 décroît exponentiellement avec le temps ; τ est la vie moyenne cherchée.

On peut encore traiter avec la même méthode le problème de la largeur des raies spectrales, c'est-à-dire étudier la répartition des intensités des diverses fréquences ν_s de la radiation, connaissant la fréquence propre ν_{mn} de l'atome.

L'avantage de cette théorie est de traiter indifféremment des problèmes qui se traitent par la théorie oscillatoire de la lumière ou des problèmes qui se traitent par la théorie des quanta de lumière.

Nous pouvons ainsi traiter aussi bien le problème des interférences, qui se résout généralement par la théorie oscillatoire, que l'effet COMPTON qui se traite par la mécanique quantique, ou enfin l'effet DOPPLER qui occupe une position intermédiaire.

Nous allons prendre tout d'abord une application assez simple :

LA THÉORIE DU RAYONNEMENT

le cas de deux atomes rayonnants. Soient A, B ces deux atomes et r leur distance, il nous faut trouver l'Hamiltonien du système formé par les deux atomes et la radiation. Nous ne traiterons que le cas où l'interaction directe des deux atomes est négligeable (distance r assez grande).

Dans ces conditions, l'Hamiltonien du système sera la somme des Hamiltoniens des deux atomes, de la radiation et des deux termes qui représentent les interactions des atomes A et B avec la radiation. Nous allons encore considérer les grandeurs

$$a_{n_A n_B n_1 n_2 \dots n_s \dots}$$

dont les carrés représentent les probabilités pour que le système soit dans l'état caractérisé par les nombres quantiques n_A , n_B pour les atomes et $n_1 \dots n_s \dots$ pour la radiation.

Supposons pour simplifier que les atomes A et B aient seulement deux états quantiques possibles 1 et 2 et qu'à l'instant initial, le seul atome A soit excité, c'est-à-dire

$$a_{2100\dots 0\dots}^{(0)} = 1,$$

tous les autres a étant nuls à l'instant initial.

Les valeurs ultérieures des a sont données par l'intégration des équations (50). On trouve encore que le terme $a_{2100\dots}$ décroît exponentiellement avec le temps.

Les probabilités

$$a_{1100\dots 10\dots}$$

croissent au contraire, et cela d'autant plus que les fréquences existantes ν_s de la radiation sont voisines de la fréquence propre ν_2 de l'atome. Au bout du temps $\frac{r}{c}$ la radiation émise par l'atome A arrive en B; la probabilité d'interaction des deux atomes, par exemple, représentée par

$$|a_{1200\dots 00}|^2$$

qui était nulle ou très faible auparavant, croît brusquement pour atteindre un maximum et décroître ensuite.

La grandeur du maximum de la probabilité est proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$. Donc l'intensité reçue par l'atome B est inversement proportionnelle au carré de la distance AB ; et il résulte de la théorie, que l'action s'est propagée de A à B avec la vitesse c de la lumière.

Nous allons traiter de même un cas d'interférences plus complexe. Soit A un atome émetteur et considérons un interféromètre quelconque constitué par deux trous d'YOUNG, par exemple. Pour étudier la radiation émise à travers l'interféromètre, nous considérerons un second atome récepteur B, situé de l'autre côté des trous d'YOUNG. Pour pouvoir appliquer notre méthode nous allons supposer A et B enfermés dans une enceinte à parois réfléchissantes, cette enceinte étant séparée en deux par l'écran percé des deux trous d'YOUNG.

La radiation qui se trouve dans la région de A est produite d'une part par les ondes stationnaires créées par A, d'autre part par les ondes diffusées par B à travers les trous. Et de même pour la radiation de la région de B.

A l'instant initial A est excité. B ne l'est pas et aucune radiation ne se trouve dans l'enceinte, donc :

$$a_{2100\dots 0} = 1$$

On peut suivre les valeurs des diverses probabilités au cours du temps par l'intégration d'équations analogues à l'équation (50). Pour que B puisse être excité, c'est-à-dire pour que $a_{1200\dots 0}$ puisse prendre une valeur notable, on trouve que B doit être situé dans un certain nombre de régions, qui ne sont autres que les ventres trouvés dans la théorie classique.

De même nous pouvons traiter de la réflexion sur un miroir plan. L'atome émetteur A et l'atome récepteur B sont encore enfermés dans une enceinte dont on fera croître indéfiniment les dimensions. A l'instant initial, A seul est excité : $a_{2100\dots 0} = 1$.

On trouve encore que cette grandeur décroît exponentiellement avec le temps. Cherchons la probabilité pour que B soit excité, c'est-à-dire $|a_{1200\dots 0}|^2$.

Nous trouvons alors la variation de $a_{120\dots 0}$ avec le temps.

Jusqu'à l'instant t_0 qui correspond à l'arrivée sur B de l'onde émise par A on a $a_{120\dots 0} = 0$; $a_{120\dots 0}$ croît alors jusqu'à une valeur constante (inversement proportionnelle au carré de la distance des deux

LA THÉORIE DU RAYONNEMENT

atome). A l'instant t_1 où l'onde réfléchi sur le miroir revient en B il y a de nouveau un changement. Si l'atome B se trouve dans un ventre, la courbe suit le trajet (1), c'est-à-dire que l'intensité est notable. Si au contraire B se trouve à un nœud, la courbe suit le trajet (2) : l'intensité lumineuse est nulle. Pour une position intermédiaire de l'électron B on obtient une courbe intermédiaire entre (1) et (2).

Etude de l'effet Compton

La théorie quantique est basée sur la conservation de la quantité de mouvement. Initialement la quantité de mouvement de l'électron est nulle, celle de la radiation est un vecteur de grandeur $\frac{h\nu}{c}$. Après la diffraction la quantité de mouvement de l'atome est un vecteur \vec{mv} , celle de la radiation un vecteur $\frac{\vec{h\nu'}}{c}$. La somme de ces deux vecteurs doit être égale à la quantité de mouvement initiale $\frac{\vec{h\nu}}{c}$.

Dans la théorie que nous allons exposer, il nous faut remarquer que l'électron considéré est un électron libre : il n'a donc pas d'états quantiques définis par une suite discrète d'entiers ; nous pouvons toujours cependant caractériser sa vitesse par un nombre n qui sera ici continu (au lieu d'être un entier comme précédemment).

D'autre part dans l'expression de l'énergie de l'électron dans le champ, (équations (10) et (11)) nous avons fait une approximation dans le développement de

$$\frac{1}{2m} \left(p - \frac{eU}{c} \right)^2$$

mais ici le terme $\frac{eU p}{mc}$ ne produit aucun effet, car nous considérons un électron libre qui ne peut absorber un quantum entier ; il est donc nécessaire de conserver le terme $\frac{e^2 U^2}{2mc^2}$, c'est-à-dire d'ajouter à l'Hamiltonien (12) le terme H_2 donné par l'équation (13).

Ceci posé nous allons encore être amenés à considérer les coefficients

$$a_{nn_1 n_2 \dots n_s \dots}$$

dont les carrés représentent la probabilité pour que l'électron ait une vitesse définie par le nombre n , la radiation de fréquence ν_s étant définie par le nombre quantique n_s .

A l'instant initial, l'électron est immobile, seule la radiation ν_s est excitée, c'est-à-dire

$$a_{\infty \dots n, \infty \dots}^{(0)} = 1$$

tous les autres a étant nuls.

Cherchons la probabilité pour que, à l'instant t , l'électron ait une vitesse définie par n , le nombre quantique n_s de la radiation ν_s ait diminué de un, tandis qu'il s'est créé une nouvelle radiation de fréquence ν_σ . Cette probabilité est représentée par le carré du module de

$$a_{n, \infty \dots, n_s - 1, 0 \dots, 1_\sigma, 0 \dots}$$

On trouve que pour que la valeur de cette probabilité soit notable, il faut qu'il y ait la relation donnée par la théorie quantique entre les quantités de mouvement des radiations et de l'atome.

Le calcul précédent peut être développé pour trouver l'intensité de la lumière diffusée, on obtient l'expression classique de THOMSON, multipliée par un facteur voisin de l'unité (ce facteur est le cube du quotient $\frac{h\nu}{c}$ des fréquences avant et après la diffraction).

Etude de l'effet Doppler

L'explication quantique de l'effet DOPPLER est basée sur le principe de la conservation des quantités de mouvement de l'atome, et de la radiation émise par son électron.

La somme géométrique de la quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c}$ du quantum de lumière et de la nouvelle quantité de mouvement mv de l'atome doit être égale à l'ancienne quantité de mouvement de l'atome. Comme la vitesse de l'atome varie, il y a variation de l'énergie lumineuse émise et par suite une variation de la fréquence qui correspond à la variation de fréquence donnée par la théorie ondulatoire de l'effet DOPPLER.

Nous pouvons développer une théorie de l'effet DOPPLER avec la théorie générale de la radiation que nous avons exposée. Considérons

LA THÉORIE DU RAYONNEMENT

un atome en mouvement et la radiation. L'état de l'électron émetteur est défini par un nombre quantique n ; le mouvement d'ensemble de l'atome est défini par un autre nombre quantique, soit m , qui définit la vitesse du noyau.

Supposons qu'à l'instant initial l'électron n'est pas sur son orbite stable, mais qu'il est sur $n = 2$ par exemple, et qu'il n'y a pas de radiations dans l'espace, donc :

$$a_{2m00\dots0\dots} = 1 \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Cherchons après un certain temps la valeur du coefficient $a_{1m'0010\dots0}$, qui nous représente la probabilité que l'atome ait émis son énergie d'excitation.

On trouve pour $a_{1m'0\dots1\dots0\dots}$, une valeur différente de zéro, mais pour que cette valeur ne soit pas négligeable, il doit exister entre la quantité de mouvement initiale, définie par m , et la quantité de mouvement finale, définie par m' , ainsi que celle $\frac{h\nu}{c}$ correspondant à l'indice s de la radiation émise, la même relation que celle obtenue par la théorie quantique ordinaire, c'est-à-dire que la somme des quantités de mouvement de la radiation et de l'atome après émission est égale à la quantité de mouvement primitive de l'atome. On peut même pousser le calcul jusqu'à obtenir l'intensité de la lumière émise : les résultats sont conformes à ceux de la théorie classique.

Nous voyons par ces quelques exemples que la théorie exposée ci-dessus nous permet de retrouver toute une série de résultats classiques ; mais son avantage est d'étudier d'une même façon des phénomènes qui dans la théorie classique sont étudiés de façons tout à fait différentes comme le problème des interférences ou l'effet COMPTON.

Pour terminer nous attirerons encore une fois l'attention sur les paramètres a dont le carré du module représente, nous l'avons dit, la probabilité pour que le système considéré soit dans un état déterminé. Si un des a seulement a une valeur différente de zéro, l'état du système en résulte bien défini par la théorie. Mais si deux des a ne sont pas nuls, on peut seulement dire quelle est la probabilité de trouver le système dans l'un des deux états ou bien dans l'autre. L'interprétation statistique de la mécanique quantique affirme qu'il n'est pas possible de prévoir sur le système rien de plus que ce résultat statistique. Cette conception se trouve en opposition absolue avec le principe de cau-

E. FERMI

salité. D'autre part on peut sauvegarder ce principe en supposant que l'état du système est en réalité exactement prévisible, mais dépend de facteurs que nous ignorons encore ; on peut toujours penser que c'est notre ignorance à leur sujet qui laisse subsister une indétermination.