

APPENDICE 2

FLUSSO DI UN VETTORE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

Supponiamo di avere un campo elettrico \vec{E} uniforme, quale quello che si avrebbe all'interno delle armature di un condensatore (figura 5 a). Consideriamo poi una superficie piana S la cui orientazione positiva sia definita dalla normale \vec{n} uscente da essa (figura 5 b). Se disponiamo la superficie S

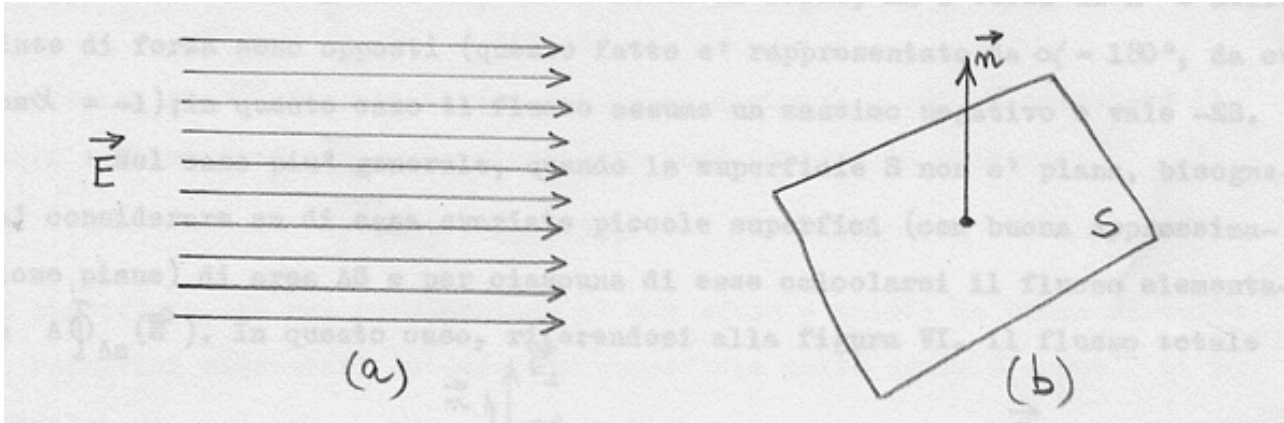


Figura 5

all'interno del campo \vec{E} , un certo numero di linee di forza attraverserà questa superficie e questo numero dipenderà dall'orientazione della superficie stessa rispetto al verso delle linee di forza. Quando S è perpendicolare alle linee di forza (quando cioè \vec{n} è parallelo ad esse) allora la superficie sarà attraversata dal maggior numero possibile di linee di forza. Quando S è parallela alle linee di forza (quando cioè \vec{n} è perpendicolare ad esse) allora il numero di linee di forza che attraverserà la superficie sarà uguale a zero.

Il numero di linee di forza che attraversa una superficie si definisce **flusso** e si indica con Φ_S .

Se le linee di forza sono originate, come nel nostro caso, da un campo elettrostatico \vec{E} , si avrà un flusso di linee di forza di un campo \vec{E} attraverso una superficie S e si indicherà con $\Phi_S(\vec{E})$.

E' facile convincersi che questo flusso è tanto più grande quanto più grande è \vec{E} (in questo caso sono più numerose le linee di forza secondo la convenzione di Faraday), quanto maggiore è l'estensione della superficie S e quanto più essa si trova vicina alla posizione perpendicolare rispetto ad esse. Tutto ciò si può riassumere nella relazione:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{n} S = ES \cos \alpha$$

dove α è l'angolo formato tra la normale \vec{n} ed il verso delle linee di forza. Si vede subito che quando $\alpha = 0$, da cui $\cos \alpha = 1$ (la superficie è perpendicolare alle linee di forza), il flusso è massimo e vale ES. Altro caso limite è quando $\alpha = 90^\circ$, da cui $\cos \alpha = 0$ (la superficie è parallela alle linee di forza), il flusso è nullo. L'ultimo caso limite che va considerato è quando la superficie è perpendicolare alle linee di forza, ma i versi di \vec{n} e delle linee di forza sono opposti (questo fatto è rappresentato da $\alpha = 180^\circ$, da cui $\cos \alpha = -1$); in questo caso il flusso assume un massimo negativo e vale $-ES$.

Nel caso più generale, quando la superficie S non è piana, bisognerà considerare su di essa svariate piccole superfici (con buona approssimazione piane) di area ΔS e per ciascuna di esse calcolarsi il flusso elementare $\Delta\Phi_{\Delta S}(\vec{E})$. In questo caso, riferendosi alla figura 6, il flusso totale sarà la somma di tutti i

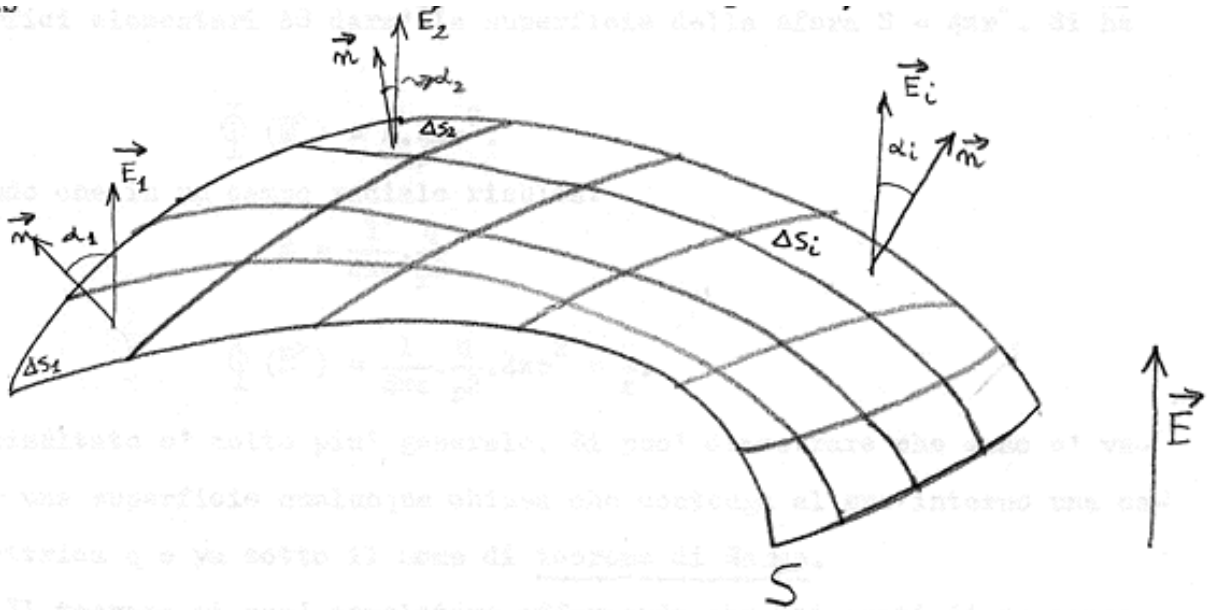


Figura 6

flussi elementari:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \Delta\Phi_{\Delta S_1}(\vec{E}_1) + \Delta\Phi_{\Delta S_2}(\vec{E}_2) + \dots + \Delta\Phi_{\Delta S_i}(\vec{E}_i) = E_1\Delta S_1 \cos\alpha_1 + E_2\Delta S_2 \cos\alpha_2 + \dots + E_i\Delta S_i \cos\alpha_i = \Sigma_i(E\Delta S \cos\alpha)$$

Passando dagli elementi di superficie ΔS , piccoli ma finiti, agli elementi infinitesimi dS , anche qui, come nell'Appendice 1, si passa all'espressione integrale:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S E \cdot \cos\alpha \cdot dS = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

Come esempio calcoliamoci il flusso attraverso una superficie sferica centrata su una carica elettrica q il cui campo (radiale) sia \vec{E} . In questo caso, essendo il campo radiale, in ogni punto della superficie sferica esso risulterà perpendicolare alla superficie, per cui l'angolo formato tra \vec{n} e la linea di forza sarà $\alpha = 0$ (da cui $\cos\alpha = 1$). Il flusso su ogni singolo elemento di superficie sarà allora:

$$\Phi(\vec{E}) = \Sigma(E \cdot \Delta S)$$

Osservando che S è costante (in quanto la distanza a cui è calcolato il campo elettrico è sempre la stessa) si può mettere in evidenza:

$$\Phi(\vec{E}) = E \cdot \Sigma(\Delta S)$$

La superficie che noi consideriamo è una sfera e quindi la somma di tutte le superfici elementari ΔS darà la superficie della sfera $S = 4\pi r^2$. Si ha quindi:

$$\Phi(\vec{E}) = E \cdot 4\pi r^2$$

Ricordando che in un campo radiale risulta:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2}$$

si ha:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon}$$

Questo risultato è molto più generale. Si può dimostrare che esso è valido per una superficie qualunque chiusa che contenga al suo interno una carica elettrica q e va sotto il nome di **teorema di Gauss**.

Il teorema si può completare affermando che nei punti di un campo elettrostatico nei quali non vi sono cariche, il flusso di \vec{E} attraverso una superficie chiusa e non contenente nessuna carica è nullo. Ciò significa che, mentre nel caso di una carica posta all'interno di una determinata superficie tutte le linee di forza uscenti dalla carica dovranno attraversare questa superficie dando un contributo al flusso pari a q/ϵ , nel caso invece di una superficie chiusa non contenente la carica, le linee di forza entranti da un qualunque lato della superficie, essendo radiali e non chiuse in sé, dovranno necessariamente uscire dall'altro lato della superficie, di modo che il flusso totale risulta nullo.

Un'altra notazione di rilievo può a questo punto essere fatta; se consideriamo un cono di linee di forza (un tubo di flusso) che si dipartono da una carica, come conseguenza del fatto che \vec{E} varia con il quadrato della distanza, si trova che il flusso di \vec{E} attraverso una qualunque sezione del tubo di flusso è costante. Una conseguenza di quanto detto è che **il teorema di Gauss è equivalente alla legge di Coulomb** con la differenza che il primo, noto il campo in ogni punto dello spazio, permette il calcolo della carica che si trova all'interno di una data zona di tale spazio, mentre il secondo, note le cariche, permette di calcolare il campo.

In definitiva il teorema di Gauss per l'elettrostatica si esprime con la seguente relazione:

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon}$$

e questo fatto ci dice che nel campo elettrico vi sono sorgenti di carica.

Nel caso magnetostatico, quando si consideri una superficie chiusa intorno ad un magnete, attraverso di essa tante sono le linee di forza che entrano quante sono quelle che escono (le linee di forza sono chiuse sul magnete e l'impossibilità di ottenere un polo magnetico isolato garantisce sempre ciò). Questo fatto vuol dire che il teorema di Gauss per la magnetostatica fornisce come risultato che il flusso uscente da qualunque superficie chiusa posta nel campo (sia che contenga sia che non contenga, il magnete) risulta sempre nullo:

$$\Phi_s(\vec{B}) = 0$$

Un campo in cui si verifichi ciò è chiamato solenoidale ed un campo è solenoidale quando a lato di sorgenti si hanno contemporaneamente pozzi in cui si annullano le sorgenti. Scrivendo l'ultima relazione scritta con la notazione vista per il campo elettrico, si ha:

$$\int_S \vec{B} \times \vec{n} dS = 0.$$

Risulta, chiaro allora che mentre il campo magnetico è solenoidale, il campo elettrico non lo è.