BRUNO TOUSCHEK
Istituto di Fisica Università di Roma

CORSO DI RELATIVITA' RISTRETTA

***

PREFAZIONE

Feci un primo abbozzo di queste note quando il Prof. Cortini dell'università di Napoli mi invitò a partecipare a un convegno che ebbe lo scopo di portare l'insegnamento della teoria della relatività ristretta alle scuole superiori. Il convegno si tenne a Serapo alla fine di novembre del '72 e mi parve utile presentare uno svolgimento del tema limitato all'assoluto minimo dei fatti essenziali. Presentai il mio contributo come lo "scheletro" della teoria della relatività, essendo convinto che la "carne" potrebbe essere benissimo fornita dagli stessi insegnanti, i quali, dopo tutto, sono più vicini ai loro allievi, e quindi sanno senz'altro meglio di me rendere interessante il soggetto.

Lo scheletro è contenuto nelle sezioni II.3.4 e III.2,3,4 della presente nota.

Ancora molto incerto sulle possibilità pratiche della linea (certamente: non tutta originale) da seguire, accettai l'invito estesomi dalla prof.ssa Mancini, di tenere un corso di quattro lezioni per la III classe del Liceo Virgilio di Roma. Il risultato di questo esperimento è difficile d'accertare, ma mi pare, dopo un primo "shock" causato dalla mia inesperienza didattica a livello liceale, di essere stato seguito, almeno con quel minimo di interesse, che si ha il diritto di aspettarsi, quando si rompono le abitudini di un curricolo quasi centenario.

I primi tre capitoli della presente nota sono il contenuto delle lezioni fatte al Virgilio, allargate con gli argomenti che sorsero nella discussione tenuta dopo l'ultima conferenza.

Infine tenni una conferenza presso il Liceo Kennedy a Roma, in un corso di aggiornamento per insegnanti liceali, svoltosi nel gennaio 1973 sotto la direzione del prof. Zadro dell'università di Padova. Parte del capitolo IV di questa nota è dovuta alla discussione seguita a questa conferenza.

Queste note vanno un po' al di là dello "scheletro" presentato a Serapo. Potrebbero essere lette come appunti fatti per un ipotetico corso di 6-7 lezioni da dare in un liceo classico. Sia ben chiaro che gli appunti sono una cosa, le lezioni un'altra. Le contingenze che separano gli uni dalle altre, di natura "propedeutica" per menzionarne una: al Virgilio – nel periodo delle mie conferenze di prova - gli studenti non avevano conoscenza alcuna delle esperienze fondamentali (0ersted, Faraday) e della teoria (Faraday, Maxwell) dell'elettromagnetismo. Per spiegare la convinzione, assai diffusa alla fine del secolo, che la velocità della luce fosse una costante universale, dovetti quindi ripiegare su un discorso storico sullo sviluppo della teoria di Maxwell e la sua brillante conferma a mezzo delle esperienze di H. Hertz. Traccia di questo discorso, che in realtà comprendeva una lezione e mezza, si trova in forma molto compressa nella sezione II.1.

Lo spirito del corso – se di spirito si può parlare - fu quello di dare una idea di come nasce una grande teoria. Cercai pero di ricordarmi che il corso non era rivolto ai futuri fisici e matematici, ma a giovani con intenzioni più modeste: i futuri presidenti, parlamentari e giudici supremi. Chiamerei la rappresentazione da me cercata "quasi storica" (nel senso di un romanzo storico scritto da un autore troppo pigro per fare una approfondita ricerca storica) e induttiva, o meglio intuitiva. Sono convinto che si peccherebbe contro ogni realtà del cervello umano se si volesse presentare la relatività ristretta tramite un processo "deduttivo", il quale pretendesse che il progresso vada come un orologio con il tic tac di fatti, analisi, teoria.

Considererei un successo questo abbozzo di un corso, se fossi riuscito a comunicare a chi lo ha sentito almeno una parte di quel senso di avventura, che ebbi, quando per la prima volta vidi davanti a me credendo di capirlo il magnifico edificio creato da A. Einstein.

Infine voglio ringraziare gli amici, che hanno avuto la pazienza di ascoltarmi, il prof. Cortini in particolar modo per avermi portato a indagare sul tema, la professa Mancini per avermi

offerto la possibilità dell'esperimento didattico, il prof. Zadro e tutti coloro che con domande ed interventi hanno tanto aiutato a chiarirmi le idee.

INDICE

***

I. LA RELATIVITÀ GALILEANA

I.1. Sistemi inerziali

Un sistema di coordinate cartesiane x,y,z, è detto inerziale, se il moto di una particella di prova espresso nella forma $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ appare rettilineo e uniforme qualunque sia la sua velocità iniziale. Esempio di un sistema inerziale è una cabina di un ascensore in caduta libera. Il pavimento della cabina forma il piano x,y, la terza coordinata z è la distanza dal pavimento, Fino a pochi anni fa l'esperienza di vita in un sistema inerziale era di piccolissima durata e raramente offriva all'esperimentatore l'ozio di lanciare palline. Solo recentemente i sistemi inerziali sono stati praticamente esplorati, primo nel volo balistico di un aereo (anche di breve durata), poi nelle capsule spaziali orbitanti.

Un sistema di coordinate può anche essere "parzialmente inerziale": Le biglie di bigliardo hanno delle traiettorie rettilinee ed uniformi (si trascurano gli effetti dell'attrito) nel piano x,y orizzontale. Il sistema è inerziale sotto il vincolo $z = 0$.

La relatività galileana può allora essere formulata così: Se $S(x,y,z)$ è un sistema inerziale e $S'(x',y',z')$ è un sistema in moto rettilineo e uniforme rispetto a S, anche S' è un sistema inerziale. Il teorema può anche essere applicato a sistemi parzialmente inerziali, se la velocità del moto relativo dei due sistemi è soggetta al vincolo che definisce la "parzialità".

I.2. Moto rettilineo uniforme

In quanto segue consideriamo solo una coordinata x. In questo caso non si può più parlare di "rettilinearità". Il sistema inerziale è allora definito solo dalla uniformità del moto delle particelle di prova.

Un esempio di moto uniforme è dato dall'equazione

$$x = v\,t \tag{1}$$

Al tempo $t = 0$ la particella di prova si trova a $x = 0$. La sua velocità costante v è misurata per esempio in $cm.sec^{-1}$.

L'equazione (1) può essere generalizzata:

$$x - x_0 = v\,(t - t_0) \tag{1a}$$

La (1a) contiene tre parametri: x_0, t_0 e v,i quali determinano la forma più generale del moto uniforme in una dimensione.

I.3. La trasformazione di Galileo

Per decidere se un sistema è inerziale, si ha bisogno di un orologio, perché la (1) può essere solo verificata tramite una misura del tempo. Il sistema S può quindi essere individuato come $S(x,t)$ un altro come $S'(x',t')$. L'insieme dei due numeri x,t è chiamato un evento. Si cerca una relazione che permetta di attribuire a ogni evento x,t di S le coordinate x', t' di S'. Generalmente le trasformazioni che conducono da un sistema di riferimento a un altro sono della forma $x' = f(x,t)$, $t' = g(x,t)$ ove f e g sono funzioni generiche delle variabili x e t. Fra tutta l'infinità di queste trasformazioni, quella di Galileo assicura che con S sistema inerziale anche S' lo sia. La trasformazione di Galileo (G.T.) ha la forma:

$$x' = x - ut \qquad t' = t \qquad (2)$$

Come vedremo nel seguito essa non è unica: esistono altre trasformazioni (per esempio la trasformazione di Lorentz) che possono portare un sistema inerziale in un altro sistema inerziale

Per vedere il contenuto fisico dell'equazione (2) immaginiamo che $x = 0$ sia un punto fisso sulla costa e $x' = 0$ il centro del ponte di una nave che passa la costa a velocità u da sinistra a destra ($u > 0$) o da destra a sinistra ($u < 0$). Un tipico evento osservato in ambedue i sistemi di riferimento potrebbe essere un colpo di cannone sparato a $x' = a$ (a essendo la distanza fra la bocca del cannone e il ponte) al tempo t'.

La seconda (2) è una ipotesi: chiamiamola l'ipotesi del tempo assoluto. Se prendiamo un aereo da Roma a New York sappiamo benissimo che dobbiamo "ritardare" all'arrivo il nostro orologio di 4 ore. L'ipotesi dice che tornando, lo stesso orologio deve essere avanzato di esattamente quattro ore. Con tutte le diavolerie del volo intercontinentale non saremo però sorpresi se l'hostess ci dicesse di avanzare per solo tre ore!

L'inversione della (2) è:

$$x = x' + ut' \qquad t = t' \qquad (2')$$

La (2') ha la stessa forma della (2) con u rimpiazzata da -u: se la nave vista dalla costa procede con velocità u, la terra vista dalla nave recede con la velocità opposta -u. Questo fatto ci servirà da guida nella ricerca delle trasformazioni della relatività moderna. Definiamo come reciprocità il postulato secondo il quale l'inversione della trasformazione S -> S' è identica alla trasformazione di partenza (S' -> S) con la velocità relativa u rimpiazzata da -u.

I.4. Proprietà della G.T

La G.T, lascia invariate le distanze ($x'_1 - x'_2 = x_1 - x_2$) e gli intervalli di tempo ($t'_1 - t'_2 = t_1 - t_2$) come si verifica facilmente usando la (2).

La (2) trasforma il moto uniforme in unn altro moto uniforme. Usando la definizione (1) per il sistema S', si ha $x' = vt'$ e quindi dalla (2'): $x = (v + u)t$. La velocità v misurata nel sistema S' è quindi cambiata in S: risulta il teorema dell'addizione delle velocità che nella relatività galileana si scrive

$$w = u + v \qquad (3)$$

Nel caso citato nel paragrafo precedente v può essere interpretato come la velocità di partenza di un proiettile sparato dal cannone di bordo. Vista da terra la velocità del proiettile è aumentata, se il cannone è puntato in avanti ($v > 0$) e diminuita se il cannone è puntato in dietro (attenzione al ponte!).

Le equazioni della meccanica newtoniana rimangono invariate sotto la G.T. Queste equazioni determinano l'accelerazione di una particella nei termini della distanza di quella particella da tutte le altre che formano il sistema fisico. Le distanze rimangono invariate e anche le accelerazioni non cambiano, se alla velocità u della particella si aggiunge la costante velocità u.

Come detto la seconda equazione (2) : $t' = t$ corrisponde alla esperienza fisica del tempo galileano: non c'era evidenza per uno sfasamento fra un orologio tenuto sulla terra ferma e un altro portato per esempio su una nave.

II. LA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ

II.1. La Teoria dell'Elettromagnetismo è incompatibile con G.T.

Nel 1873 Clerk Maxwell pubblico la sua teoria dell'elettromagnetismo. Questa teoria spiegò tutta la fenomenologia eelettromagnetica conosciuta a suo tempo e prevedeva dei fenomeni che più tardi (Hertz 1888) furono verificati sperimentalmente: le onde elettromagnetiche.

La teoria espressa nella forma di un sistema di equazioni differenziali ed inomogenee (in presenza delle sorgenti dei campi elettrici e magnetici, cioè delle cariche e delle correnti) contiene una e una sola costante "universale" c. Questa costante ha le dimensioni di una velocità ($cm\ sec^{-1}$) e fu introdotta da Oersted (1820) per poter confrontare i fenomeni magnetici con quelli elettrici. Nel 1856 W.Weber e R.Kohlrausch si accorsero che questa costante c era uguale alla velocità della luce, misurata per la prima volta da Olaf Roemer (1676).

L'intuizione di Weber e Kohlrausch, i successi della teoria di Maxwell e la scoperta delle onde elettromagnetiche convinsero i fisici di fine secolo che la luce fosse un fenomeno elettromagnetico e che quindi le onde elettromagnetiche della luce si propagassero con la universale velocità $c = 3.10^{10}$ $cm.sec^{-1}$ comune anche alle onde hertziane.

Che la velocità della luce sia una costante universale non è compatibile con la relatività galileana: nel sistema S' la traiettoria della fronte di un segnale di luce è data da

$$x' = \pm ct' \tag{4}$$

ove il segno + descrive la fronte che si muove in direzione della "nave" e il segno - la fronte che si muove nel senso inverso. Dalla (2') segue allora

$$x = (u \pm c)t \tag{4'}$$

La velocità della luce osservata in S sarebbe quindi

$$C'_S = (u \pm c) \neq \pm c \qquad \text{per } u \neq 0 \tag{5}$$

Mentre la (5) è in accordo con il teorema della addizione delle velocità (3), non è in accordo con la teoria maxwelliana. Se questa teoria è vera in S′ non può anche essere vera in S. Ripetiamo che la teoria maxwelliana prevede che la luce si propaghi con la velocità costante c. Osserviamo anche che la terra è in movimento sia rispetto al sole, sia rispetto al sistema delle stelle fisse.

Le equazioni di Maxwell sono verificate sulla terra - credere che siano valide solo sulla terra sarebbe un ritorno al sistema tolemaico.

Una verifica sperimentale della indipendenza della velocità della luce dal moto del nostro pianeta fu fornita da Michelson (1881). Scopo della esperienza era di verificare l'esistenza di un "etere" che propagasse la luce come l'aria propaga il suono. Ci si domandava: se l'etere è a riposo rispetto al sistema delle stelle fisse, la terra dovrebbe risentire il "vento" causato dal suo movimento attraverso l'etere? Uno potrebbe immaginare che con la terra andando "contro-vento" la velocità della luce misurata sulla terra fosse minore, che con la terra andando con "vento in poppa". Per Einstein sembra che l'esperienza di Michelson fosse marginale, non la cita nel 1905. L'universalità della velocità della luce - risultato della teoria maxwelliana - gli parve argomento molto più forte dell'analogia fra suono e luce - appunto la teoria dell'"etere" - mostrata errata da Michelson.

II.2. Programma della Relatività Ristretta

Si presenta la seguente alternativa; o cambiare le equazioni di Maxwell in modo da renderle compatibili con la relatività galileana, o trovare un analogo alla G.T. ma diverso dalla G.T. stessa, il quale soddisfi c = cost per tutti i sistemi in moto relativo rettilineo e uniforme. La prima alternativa è persa per "forfait": alternative alla teoria di Maxwell non sono state trovate; la seconda conduce a un nuovo problema. Le sorgenti (cariche e correnti) - per esempio un filo che porta una corrente in un motore elettrico - sono soggette alla meccanica la quale rimane invariata (cfr. I.4.) sotto la trasformazione di Galilei. E' probabile che sotto la nuova trasformazione che dà c = cost per tutti i sistemi inerziali la meccanica "classica" non sia invariante. Bisognerà allora trovare una nuova meccanica.

La ricerca della nuova relatività ha un suo "principio di corrispondenza". Si riconosce che le velocità contemplate nella trasformazione di Galileo erano tutte molto piccole in confronto con la velocità della luce c. Bisogna quindi imporre alla nuova trasformazione di approssimare la G.T. nel limite $u/c \to 0$.

II. 3. La Trasformazione di Lorentz

Cerchiamo di modificare la trasformazione di Galileo (2), (2') in modo tale che:
(a) c sia la stessa per tutti i sistemi inerziali in moto relativo uno all'altro.
(b) che nel limite di piccole velocità - $u \ll c$ - la nuova trasformazione sia identica a quella di Galileo.
(c) che valga il principio di reciprocità definito in I.3.
(d) che lo spazio rimanga "isotropo": se si cambia x in - x, x' in - x' ed u in - u la nuova trasformazione deve rimanere invariata.

Il postulato (d) richiede una spiegazione più ampia. Osserviamo anzitutto che la G.T. (2) soddisfa questo postulato, il quale però è di una generalità che trascende la relatività galileana in quanto è connesso alla nostra libertà di girare liberamente nello spazio tridimensionale x, y, z le assi delle coordinate. Facendo per esempio una rotazione di 180° intorno all'asse z, x va rimpiazzato da - x, y da - y e u (la componente della velocità nella direzione x) da $-u_x$.

Cerchiamo allora di "inventare" la trasformazione di Lorentz in passi successivi. Modifichiamo la prima (2) ponendo

$$x' = \gamma\,(x - ut) \qquad (6)$$

lasciando invariata la seconda (2). Con la scelta (6) ci limitiamo a considerare trasformazioni lineari, dato che trasformazioni non lineari richiederebbero una nuova "filosofia" della misura; se l'osservatore in S dicesse che una lunghezza è per esempio 2a (a = unità di misura in S) non varrebbe più che in S' la stessa lunghezza sia 2a' (ove a' è l'unità di misura in S').

La dipendenza da x - ut segue dalla richiesta che l'origine del nuovo sistema S′ visto da S si sposta secondo x = ut. Il fattore γ - che determina la transizione dalla (2) alla (6) - può dipendere solo dalla velocità u. Dato che deve essere adimensionale - un puro numero - dobbiamo avere $\gamma = \gamma\ .(u/c)$. Il postulato (d) poi impone che

$$\gamma = \gamma\ .(|u/c|) \tag{7}$$

cioè che γ deve essere indipendente dal segno di u. Il postulato (b) ci mostra che dobbiamo avere $\gamma\ (0) = 1$.

Mostriamo ora che la (6) non basta per soddisfare il postulato (a). Sia $x = \pm\ ct$ un segnale di luce che si propaga (+) da sinistra a destra o (-) da destra a sinistra. Secondo la (6) questo segnale visto in S′ ha la forma $x' = \gamma\ (\pm\ c - u)t$. La velocità della luce apparente nel sistema S' è quindi $c' = \gamma\ (+\ c - u)$. Secondo il postulato (a) si dovrebbe avere $c' = \pm\ c$ e quindi $\gamma = c/(c \pm u)$. Ma dato γ può (si ricorda (d)) solo dipendere da |u| il postulato (a) non può essere soddisfatto neanche con la generalizzazione (6) della (2).

Ci vediamo quindi costretti ad abbandonare la seconda equazione $t' = t$ della trasformazione di Galileo rimpiazzandola con una generica relazione lineare, per esempio

$$t' = at + bx \tag{8}$$

il postulato (b) (del II.3) ci dice che nel limite galileano $u/c \to 0$ si deve avere $a(0) = 1$ e $b(0) = 0$. Il segnale di luce $x = \pm\ ct$ allora appare come $x' = \gamma\ (\pm\ c - u)t$ e la (8) ci dà $t = t'/(a \pm cb)$. Abbiamo quindi $x' = \gamma\ (\pm\ c - u)t'/(a \pm cb)$. La velocità della luce c' è definita da x'/t' è quindi data da

$$c' = \gamma\,\frac{\pm c - u}{a \pm cb}$$

Secondo il postulato (a) dobbiamo avere $c' = \pm\ c$, che ci determina $a = \gamma$ e $b = -\ u\gamma/c$. Abbiamo quindi mostrato che il postulato (a) può essere soddisfatto dalla trasformazione

$$x' = \gamma\ (x - ut)$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{u_x}{c^2}\right) \tag{9}$$

La (9) è già la trasformazione di Lorentz, solo che non sappiamo come scegliere il valore della costante γ.

Il mistero si risolve invocando (c), cioè il principio della reciprocità. Moltiplicando la seconda equazione (9) con u e facendo la somma della prima e della seconda abbiamo $x' + ut' = \gamma\ x(1-u^2/c^2)$ e quindi

$$x = \left[\frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\right](x' + ut')$$

Ma secondo il principio della reciprocità dovremmo avere $x = \gamma\ (x' + ut')$.

Ne segue che $\gamma^2 = 1/(1 - u^2/c^2)$ e quindi

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad (10)$$

Le formule (9), (10) che rappresentano la trasformazione di Lorentz, furono trovate da Lorentz (il quale notò che in assenza di "sorgenti" le equazioni di Maxwell rimasero invariate sotto questa trasformazione).

II.4. Ancora sulla L.T.

La L.T. differisce da quella di Galileo per il fattore y e per il mescolamento fra tempo e spazio che risulta dal secondo termine a destra della seconda equazione (9). La trasformazione di Galileo è ottenuta dalla (9) facendo c tendere a infinito, in questo limite si ha $\gamma = 1$ e u_x/c^2 scompare. E' quindi soddisfatto il postulato (b) del paragrafo precedente. In particolare si ha per $u/c \ll 1$:

$$\gamma = 1 + u^2/2c^2 + O\ (u^4/c^4) \quad \text{(v. NOTA in fondo)} \qquad (11)$$

ove $O(u^4/c4)$ indica termini che vanno a zero come u^4/c^4. Una stazione spaziale che orbita vicina alla terra avrà una velocità u di circa 8 km/sec ($u^2 = gR$, ove $g = 9.81\ m.sec^{-2}$ è l'accelerazione del campo gravitazionale terrestre, ed R = 6000 km è il raggio della terra). Secondo la (11) si ha in questo caso $\gamma = 1{,}000001$. Si vede che differisce pochissimo dall'unità anche per velocità elevate come quella di un razzo orbitante.

Dall'altra parte esistono sistemi per i quali la differenza fra la L.T. e la G.T. è tutt'altro che trascurabile: nell'anello d'accumulazione "Adone" che opera nei laboratori nazionali di Frascati, elettroni e positroni girano a una velocità tanto vicina alla velocità della luce da rendere $\gamma = 3000$! In questo caso la L.T. sarebbe ben lontana da una pignola correzione alla trasformazione di Galileo.

II.5. La "Dilatazione del Tempo"

Assumiamo a questo punto che sia la L.T. e non la G.T. che determina il modo di correlare le coordinate spazio-temporali di due sistemi in moto relativo rettilineo e uniforme uno rispetto all'altro.

Consideriamo un orologio ne] sistema S in posizione $x = 0$. Un intervallo di tempo T è definito tramite due misure del tempo t_1 e $t_2 > t_1$: $T = t_2 - t_1$. Dalla seconda (9) segue allora $t'_1 = \gamma t_1$ e $t'_2 = \gamma t_2$ e quindi $T' = t'_2 - t'_1 = \gamma T$. Dato che la (10) dice $\gamma > 1$ si ha $T' > T$ che vuol dire che l'orologio fermo (nel suo sistema di riferimento) legge il tempo minore.

Usando l'inversione della (9) [la quale risulta dalla (9) se si scambia x con x', t con t' e u con −u] si può definire un intervallo di tempo $T' = t'_2 - t'_1$ misurato con un orologio fermo in S' per esempio nel punto $x' = 0$. Si ha allora $t_1 = \gamma t'_1$ e $t_2 = \gamma t'_2$ e quindi nel sistema S: $T = t_2 - t_1 = \gamma T'$. In questo caso si trova $T > T'$. La situazione è quindi completamente simmetrica fra S e S': l'orologio più lento è sempre quello che è a riposo rispetto all'osservatore.

La dilatazione del tempo è un fatto ormai sperimentalmente confermato in un gran numero di applicazioni. Un esempio è una particella radioattiva, portata a velocità vicina alla velocità della luce (come il mesone μ il quale - a riposo - decade in un elettrone e un neutrino con una vita media di circa un microsecondo; la popolazione di mesoni μ si dimezza in un microsecondo). In accordo con la dilatazione del tempo prevista dalla L.T. la vita media della particella in volo è aumentata da un fattore γ.

II.6. La contrazione di Lorentz

Le lunghezze appaiono contratte per un fattore $1/\gamma$ nello stesso modo in cui i tempi sono dilatati.

La misura della lunghezza di un oggetto va fatta facendo coincidere i punti di un metro con i punti terminali dell'oggetto. Chiamando x_1 e x_2 le coordinate di questi punti terminali si ha nel sistema S: $L = x_2 - x_1$. Se misuriamo la stessa lunghezza nel sistema S', dobbiamo insistere che $t' = \text{cost}$, per esempio $t' = 0$; la misura della lunghezza fa si che il metro tocchi i punti terminali dell'oggetto simultaneamente! Segue allora dalla seconda equazione (9) che $t_1 = ux_1/c^2$, $t_2 = ux_2/c^2$; ciò che è simultaneo in S' non lo è in S. Formando $x'_2 - x'_1 = L'$ tramite la prima (9) si trova $L' = L/\gamma$. Notare che $LT = L'T'$: il "volume" spazio temporale è una invariante sotto la trasformazione di Lorentz.

L'invarianza del volume spazio temporale ci dà una approfondita conoscenza della dilatazione del tempo. Consideriamo un mesone μ prodotto in cima all'atmosfera - diciamo a 16 km di altezza. Se la velocità del μ è $\approx$ c la sua vita media gli permetterebbe classicamente di percorrere circa 300 m ($c\tau$ - ove τ è la vita media). Sarebbe quindi molto improbabile che il μ arrivasse alla superficie della terra. Ma il mesone μ arriva alla superficie e questo grazie al fattore γ. Visto da terra la vita media del mesone μ è $\gamma\tau$! Mettiamoci allora nei panni del μ: lo faccio arrivare alla superficie terrestre? Quanto è lontana? Per me sono 16km,/ γ, mio γ è - diciamo - 100 e quindi la mia atmosfera è spessa 160 m, ho quindi una buona probabilità di arrivare. L'argomento suggerisce che la dilatazione del tempo e la contrazione dello spazio siano due aspetti della stessa cosa.

II.7. II teorema dì addizione delle velocità

Procediamo come nel caso galileano (I.4.). Assumiamo che in S' una particella di prova si muova secondo $x' = vt'$. Dall'inversione della (9) segue allora $x = \gamma(x + ut') = \gamma(u + v)t'$ oltre che $t = \gamma(t' + u_x/c^2) = \gamma(1 - uv/c^2)t'$. La x come funzione di t (non di t') risulta quindi essere $x = t(u + v)/(1 + uv/c^2)$. Ne segue subito il teorema dell'addizione delle velocità nella forma

$$w = (u + v)/(1 + uv/c^2) \tag{11}$$

il quale differisce da quello galileano (3) per il denominatore $(1 + uv/c^2)$. Si vede anche che nel caso $u \ll c$ e $v \ll c$ il denominatore diventa 1 e la (11) tende in questo limite alla legge galileana (3). Se u e v sono ambedue minori di c, segue dalla (11) che anche $w < c$. Contrariamente alla legge galileana risulta quindi impossibile raggiungere una velocità maggiore di quella della luce con ripetute addizioni di velocità $< c$.

Se $x' = vt'$ rappresenta un segnale di luce si ha $v = c$. In questo caso la (11) ci dà $w = c$ per ogni (!) u.

Per vedere meglio l'invalicabilità del limite $w = c$ scegliamo $u = v$. La (11) diventa in questo caso $w = 2u/(1 + u^2/c^2)$, w come funzione di u ha un massimo per $u = c$. Il valore della w per $u \to c$ è c.

La più importante conseguenza della (11) è, che non sarà mai possibile accelerare una particella di prova al di là della velocità della luce. Il processo di accelerazione aggiunge alla velocità della particella u una piccola velocità v - piccola se l'intervallo di tempo in cui agisce l'accelerazione è sufficientemente breve. Una accelerazione mantenuta nel tempo può essere analizzata in tante accelerazioni mantenute per un tempo breve; la ripetuta addizione delle velocità aggiunte nei brevi intervalli non può mai - secondo la (11) - condurre a una velocità maggiore di quella della luce.

Quella della luce appare quindi la velocità limite.

III. LA DINAMICA RELATIVISTICA

III.1. Cinematica e Dinamica

Le considerazioni del capitolo precedente sono tutte cinematiche.Si studiava il moto delle particelle senza indagare sugli elementi che possono determinare questo moto; le forze e le masse (responsabili le ultime delle forze inerziali). Abbiamo svolto l'argomento del precedente paragrafo in due dimensioni; una spaziale x, e una temporale t. L'argomento completo ne richiederebbe quattro; 3 spaziali x, y, z, e quella temporale t. Se la velocità relativa dei due sistemi S e S′ ha la sola componente u la (9) rimane valida e vanno aggiunte y' = y z' = z: le coordinate trasversali non cambiano sotto la L.T.

Il problema centrale della relatività speciale è già stato accennato in 1.4: quello di trovare una modifica della meccanica newtoniana che sia compatibile con la legge di trasformazione di Lorentz. Che una tale meccanica possa esistere fu mostrato da A.Einstein.

La meccanica relativistica rende "covariante" il sistema delle equazioni di Maxwell e di Lorentz, le quali definiscono da una parte la creazione dei campi elettromagnetici da parte delle sorgenti in moto (cariche e correnti), dall'altra parte (forza di Loretz) l'azione meccanica dei campi stessi sulle cariche.

Se uno riesce a creare questa nuova meccanica - invariante sotto la L.T. e non sotto la G.T. - si arriva al teorema fondamentale della relatività ristretta, cioè, che è impossibile distinguere fra due sistemi in moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro sulla base di misure elettriche o meccaniche. Si stabilisce così la "democrazia" fra i sistemi di riferimento in moto relativo uniforme e rettilineo.

Mostreremo nella sezione seguente che la nuova meccanica è determinata dalla dipendenza della massa di una particella dalla sua velocità: $m = m(u) = \gamma\, m(0)$.

III.2. Massa e velocità

Cerchiamo di adattare la meccanica alla trasformazione di Lorentz ed imponiamo che nel limite $u \ll c$ la meccanica newtoniana risulti da quella nuova.

Per esplorare le possibilità consideriamo l'urto anelastico fra due masse uguali m. Esempio di un tal urto è la reazione chimica

$$a + b \rightarrow ab \qquad (12)$$

a e b stanno per le due particelle ed ab per il composto formato nel loro urto anelastico. (Un altro importante esempio è il pendolo balistico a = proiettile, b = pendolo balistico prima dell'urto, ab = pendolo balistico dopo l'urto).

Consideriamo il processo in due sistemi di riferimento: S', il sistema del centro di massa, ed S il sistema di laboratorio. La seguente tabella mostra come il processo (12) si presenta nei due sistemi di riferimento. In S la

	S	S′
a	w	u
b	0	-u
ab	U	0
M_{ab}	M(u)	M(0)

particella a è in movimento e la sua velocità è w, la particella b è a riposo. Nel sistema del baricentro le due particelle hanno velocità uguali e opposte, cioè u e -u. Il sistema S si muove con velocità +u rispetto a S′, il che annulla appunto la velocità della particella a. Segue allora dal teorema per la addizione delle velocità (nel nostro caso si ha v = u) che

$$w = 2u/(1 + u^2/c^2) \qquad (13)$$

Nel limite galileano si ha quindi w = 2u, come era da aspettarsi. Nella seguente discussione ci servirà l'inversione della (13). Per ottenere u come funzione di W, bisogna risolvere un'equazione quadratica. La soluzione è

$$u = \frac{c^2}{w}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}\right)$$

(Si deve scegliere la radice negativa, dato che quella positiva darebbe u > c).

La strategia che vogliamo applicare alla creazione della nuova meccanica si può chiamare; "Conservazione delle leggi di conservazione". Ciò ci conviene dato che queste leggi sono di validità più generale che le equazioni di moto dalle quali esse possono essere derivate. Esse esprimono certe proprietà generali del problema fisico: la conservazione dell'energia, per esempio, segue se le equazioni del moto non contengono esplicitamente la coordinata t: forze conservatrici = forze indipendenti dal tempo.

Le leggi che interessano nel nostro caso sono tre:

(1) la conservazione della velocità del centro di massa;
(2) la conservazione dell'impulso;
(3) la conservazione dell'energia.

Applicando la meccanica classica al nostro problema si trova; per la conservazione del moto del centro di massa in S', (mu - mu)/2m = 0 (definizione del centro di massa) in S, mw/2m = u. La conservazione dell'impulso dà (in S) mw = Mu dove M è la massa della particella composta.

Infine la conservazione dell'energia assume la forma (in S')

$$2.\tfrac{1}{2}.mu^2 = mu^2 = \Theta \qquad (15)$$

Sulla sinistra di questa equazione si ha l'energia cinetica delle particelle incidenti, a destra l'energia "latente", per esempio termica, che si crea nell'urto. Si vede che nella meccanica classica la conservazione dell'energia porta fuori dalla meccanica stessa, l'energia cinetica è convertita in calore. Vedremo più tardi che questo non è più il caso nella meccanica relativistica.

La conservazione del baricentro nella meccanica classica ci da w = 2u, la conservazione dell'impulso quindi M = 2m.

Discutiamo prima la conservazione della velocità del baricentro. Questa differisce dalle altre due leggi per il fatto che connette una quantità "cinematica" u con delle quantità dinamiche come le masse delle particelle. E' proprio questo che ci serve se vogliamo derivare la nuova dinamica dalla "cinematica" della trasformazione di Lorentz.

Osserviamo anzitutto che la legge sul baricentro classico è in contrasto con la cinematica relativistica in quanto dà w = 2u mentre nella meccanica relativistica dovrebbe dare la w definita nell'equazione (13).

Per mantenere il principio della conservazione del moto del baricentro è necessario quindi modificare il concetto della massa, la quale non può più essere indipendente dalla velocità. Scriviamo m = m(w), con m(0) –la massa a riposo - uguale a quella della meccanica classica. Allora dovremmo avere (in S)

$$\frac{m(w)w}{m(w)+m(0)} = u \qquad (16)$$

Al numeratore contribuisce solo la massa a che si muove con velocità W, b è al riposo; quindi il denominatore m(w) + m(0). La (16) definisce m come funzione di w, dato che u - secondo la (14) - è funzione di w. Sostituendo nella (16) la (14) si trova:

$$m(w) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m(0)\gamma(w) \qquad (17)$$

[per l'ultima equazione cfr.(10)].

Si vede che l'insistere sulla conservazione della velocità di baricentro ci costringe ad assumere la ben specifica dipendenza (17) della massa dalla velocità w.

La (17) ci dice che la massa cresce con la velocità. Il suo valore minimo è rappresentato dalla massa di riposo m(0); per w che tende a c – la velocità della luce - la massa tende all'infinito. Questa dipendenza della massa dalla velocità è una conseguenza plausibile della cinematica lorentziana: la massa è ciò che resiste all'accelerazione. Se la massa non crescesse non si vede perché dovrebbe essere impossibile impartire alla particella una velocità maggiore di quella della luce, applicando per esempio una forza costante alla particella. Si vede che il contenuto della (17) è: più si spinge un oggetto verso la velocità della luce, più "inerte" diventa.

III.3. Conservazione dell'impulso e dell'energia

La conservazione dell'impulso risulta banalmente soddisfatta in S'. Si ha: $m(u)u + m(u)(-u) = M(0)0$. In questo punto si è fatta la plausibile ipotesi suggerita nella sezione precedente e dalla meccanica newtoniana che l'impulso p di una particella con massa m e velocità v sia data da

$$p = m(v)v \tag{18}$$

con m(v) definita dalla (17).

Nel sistema S la conservazione dell'impulso si presenta nella forma

$$m(w)w = M(u)u \tag{19}$$

perché la particella si muove con la velocità w, ed il "composto" ab, che nel sistema S' ha la massa M(0) con la velocità u.

Usando la (17) per esprimere M(u) in termini di M(0) - la massa della particella composta nel sistema S' -, applicando la (13) per esprimere w in termini di u ed usando la (17) anche per m(w) la (19) può essere riscritta nella forma

$$M(0) = 2m(u) \tag{20}$$

Dalla conservazione dell'impulso segue quindi una legge che a prima vista può essere interpretata come una conservazione della massa. Nel sistema S′, M (la particella composta) è al riposo ed ha quindi il valore M(0). La massa di ciascuna delle particelle a e b è m(u) (hanno la velocità ± u) nel baricentro.

Studiamo allora la (20) nel limite galileano : $u^2 \ll c^2$. In questo caso si ha approssimativamente $\gamma(u) = 1 + u^2/2c^2$ (1) e quindi $2m(u) = 2m(0) + m(0)u^2/c^2$. Dalla (20) segue allora:

$$M(0)c^2 = 2m(0)c^2 + m(0)u^2 \qquad \text{per } u^2 \ll c^2 \tag{21}$$

La legge della conservazione della massa diventa quindi espressa in una equazione che ha una forma non molto dissimile a quella della conservazione dell'energia espressa dalla (15). Si riconosce l'ultimo termine come rappresentante dell'energia cinetica delle due particelle a e b. Secondo la (21) quest'energia cinetica è data da

$$K = m(0)u^2 = [M(0) - 2m(0)]c^2$$

Ricordando la (15) vediamo che l'eccesso di massa $\delta M = M(0) - 2m(0)$ è legato all'energia termica da

$$K = \Theta = \delta Mc^2 \tag{22}$$

Nell'urto anelastico fra due particelle la loro energia cinetica è quindi trasformata in massa.

La (22) è stata derivata nel limite $u^2 \ll c^2$. Ma non c'è ostacolo per considerarla valida generalmente. Se assumiamo che l'energia di una particella che in un certo sistema di riferimento si muove con la velocità v sia data da

$$E = m(v)c^2 \tag{23}$$

si vede, guardando la (20) che la conservazione dell'energia può senz'altro essere identificata con la conservazione della massa. La energia dello stato iniziale è secondo la (23) $E_i = 2m(u)c^2$; lo stato finale è la particella composta al riposo, la sua energia è quindi $E_f = M(0)c^2$ e la (20) ci dice che $E_f = E_i$.

III.4. Osservazioni sulla conservazione dell'energia

Nella precedente sezione abbiamo visto che nulla ci impedisce di identificare l'energia di un sistema con la sua massa tramite l'equazione (23). Questa interpretazione della legge della conservazione dell'energia rappresenta una "chiusura" che mancava alla meccanica newtoniana, per la quale l'energia non è conservata meccanicamente ma si trasforma in altra forma d'energia - quella termica - fuori dal concetto dell'energia meccanica.

Nella teoria einsteniana l'energia e la massa sono strettamente connesse dalla (23). L'energia cinetica che può essere definita come

$$K = m(v)c^2 - m(0)c^2$$

(in quanto si annulla per $v = 0$, ed è $= m(0).v^2/c^2$ per $v^2 \ll c^2$) è convertibile in un eccesso di massa δM. Non c'è bisogno di specificare la forma della energia la quale è creata in un urto: la massa della particella creata nell'urto è più grande di quella delle sue componenti [2m(0)] al riposo.

Il concetto dell'identità fra massa ed energia diventa ancora più convincente, se si cerca di rendersi conto in che consista l'energia termica creata nell'urto fra due oggetti. Secondo la teoria cinetica del calore l'energia termica in un oggetto risiede nel moto disordinato degli atomi che lo compongono. Un incremento della temperatura di un oggetto alza la velocità media di questo moto disordinato. Se due oggetti si incontrano la loro energia cinetica si trasforma in energia termica, il che vuol dire che l'energia cinetica degli atomi che formano l'oggetto composto è più elevata di quella vista negli oggetti che collidono nel loro individuale sistema di riposo. Ma - come abbiamo visto prima - un aumento dell'energia cinetica degli atomi è equivalente a un aumento delle loro masse [cfr.(17)], la massa totale dell'oggetto composto (la somma delle masse degli atomi in movimento) è quindi aumentata. Si può dire che la formula di Einstein (23) fornisce una spiegazione cinetica dell'energia termica.

La reazione a + b -> (ab) può anche avvenire nel senso opposto, cioè nella forma (ab) -> a + b. Dato che l'energia cinetica deve essere sempre positiva il "decadimento" dell'oggetto composto può avvenire solo se

$$M_{(ab)} > m_a + m_b$$

Questa considerazione sta alla base della teoria della radioattività. Esempio: il neutrone (la particella neutra scoperta da Chadwick nel 1932, che insieme con il protone - particella con carica opposta, cioè positiva, a quella dell'elettrone) è il mattone da cui si fanno i nuclei atomici. La massa del neutrone è maggiore della somma delle masse di un protone ed un elettrone. E' quindi possibile una reazione del tipo $n \to p + e + \nu$ in cui n sta per neutrone, p per protone, e per elettrone e ν per il "neutrino" una particella di massa zero. Infatti un neutrone libero vive in media una ventina di minuti prima di decadere nel modo sopraindicato.

Come nella teoria newtoniana, la quantità caratteristica di una particella è la sua massa. Essa, grazie all'equazione (23) può essere espressa in unità d'energia, ove $E(0) = m(0)c^2$ è chiamata l'energia di riposo della particella. Nel campo della fisica delle particelle elementari l'energia è di solito espressa in unità di "electronvolt": eV. La scelta di questa unità è dovuta al fatto che il modo più elementare per accelerare una particella, e quindi aumentare la sua energia, consiste nel farle percorrere un campo elettrico. Se questo campo è creato da un potenziale elettrico V, l'energia impartita dal campo alla particella è eV, (e essendo la carica dell'elettrone - tutte le particelle hanno cariche che sono multipli di quella dell'elettrone). La carica dell'elettrone è 1.6 x 10^{-19} Coulomb, la sua energia di riposo $E_e(0)$ è di 0.51 MeV (MeV = milioni elettron-volt), quella del mesone μ è $E_\mu(O)$ = 102 MeV, quella del protone circa 930 Mev, quella del neutrone 931 Mev. E' quindi possibile che, per esempio, il neutrone decada in un elettrone negativo, un protone e un neutrino (il quale ha massa zero), dato che $E_n(0) > E_p(0) + E_e(0) +$ (0). Il neutrino è necessario in questa reazione per mantenere la conservazione del momento angolare. La conservazione della carica è garantita, dato che mentre l'elettrone ha carica - e, il protone ha carica + e, neutroni e neutrini sono neutri.

La definizione dell'energia - $E(v) = m(v)c^2$ - e dell'impulso $p(v) = m(v)v$, ci spinge ad indagare il limite di m(0) = O, cioè il comportamento meccanico di particelle senza massa di riposo.

Quando, partendo da una qualsiasi m(0) si fa tendere v alla velocità della luce, si ha $E(v) = m(v)c^2$ » $E(0) = m(0)c^2$ [cfr. la (17)] e p = m(v)c. In questo limite si ha quindi cp = E, e questa legge limite vale esattamente se la massa è esattamente zero (E(c) » O!).

Una particella con la massa di riposo m(0) = 0 è quindi caratterizzata dalla seguente relazione fra l'impulso e l'energia

$$p = E/c \qquad \text{per } m(0) = 0 \qquad (24)$$

Una tale particella non può riposare: si muove sempre con la velocità della luce rispetto a ogni osservatore.

Infatti la teoria quantistica vuole proprio che il "campo" che rappresenta le onde hertziane sia composto di "fotoni", particelle con massa zero, che si propagano con la velocità della luce. La relazione (24) rende omaggio alla teoria maxwelliana, secondo la quale l'impulso del campo elettromagnetico è proporzionale alla sua energia, il fattore di proporzionalità essendo 1/c. Proprio perché c è una "velocità grande" il fattore 1/c è piccolo e le nostre antenne televisive non si piegano sotto l'impulso dei programmi emessi dalla Rai-Tv.

Una relazione simile alla (24) vale anche per la relazione fra l'energia e l'impulso delle onde sonore; il fattore di proporzionalità in questo caso è $1/v_s$ dove v_s è la velocità del suono (circa un milionesimo di quella della luce). Ecco perché il suono ci può rompere i timpani.

IV. COSE RELATIVE E COSE ASSOLUTE

IV. I. Sulla parola "Relatività"

L'estremo di una errata rappresentazione della teoria einsteiniana è la frase: "Bè, secondo Einstein tutto è relativo". Non è vero, perché, per esempio, la velocità della luce è la stessa per tutti gli osservatori posti su un sistema inerziale.

Anche nella teoria galileana, nella fisica newtoniana, ci sono cose relative e cose assolute. Relativa allo stato di movimento dell'osservatore è la velocità, assoluta è la massa di una particella. La stessa relatività rimane nella teoria di Einstein ma all'assoluto della massa [m(0) in questo caso] va aggiunto il valore universale della velocità della luce.

Il "commercio" fatto nella transizione della meccanica classica a quella relativistica è il seguente; "tu (meccanica classica) mi dai il tempo assoluto, io ti do la velocità della luce assoluta".

La trasformazione di Lorentz relativizza la nozione della simultaneità. Secondo la L.T. (9) due eventi (0,0) e (x,0) che sono simultanei in S non lo sono in S', dove appaiano come (0,0) e $(\gamma x,\ -\ \gamma ux/c^2)$. La trasformazione di Galileo dall'altra parte relativizza la velocità della luce.

Le cose che non cambiano da osservatore a osservatore formano il soggetto della teoria dell'invarianza, che trattiamo nella prossima sezione.

IV. 2. Le invarianti

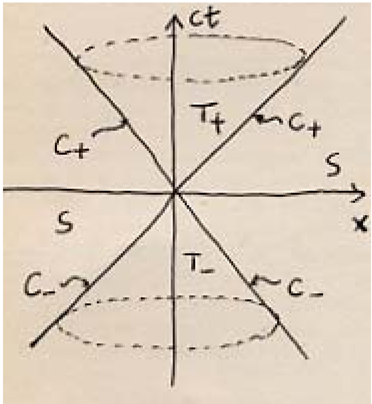
Nell'inventare la trasformazione di Lorentz siamo partiti dalla richiesta che un segnale di luce descritto da $x = \pm ct$ (cfr. II.1,II.2) dovrebbe essere lo stesso, cioè prendere la forma $x' = \pm ct'$ in ogni sistema inerziale S' che ha: in comune con S solo l'origine delle coordinate: il punto (0,0) di S corrisponde al punto (0,0) di S'.

Si verifica allora facilmente usando la trasformazione di Lorentz definita nelle equazioni (9) e (10) che

$$c^2\,\tau^2 = c^2\,t^2 - x^2 = \text{invariante}\ (= c^2\,t'^2 - x'^2) \qquad (25)$$

il valore di τ definito dalla (25) è lo stesso in tutti i sistemi di riferimento che hanno in comune l'origine (O,0). τ è chiamato il tempo proprio, perché coincide con il tempo per un sistema che rimane fermo all'origine x = O.

La (25) stabilisce una classificazione delle regioni dello spazio-tempo formato dalle coordinate x e t. Si possono distinguere i casi (a) $\tau^2 > 0$. I punti x,t che soddisfano questa relazione sono chiamati punti "time-like". (b) $\tau^2 < 0$ che definisce i punti "space-like" e (c) $\tau = 0$ che definisce il "cono della luce". Nessuna trasformazione di Lorentz può portare un evento appartenente a una delle tre categorie (a), (b), (c) in uno che appartenga a un'altra categoria. La zona "time-like", il cono della luce e la zona "space-like" si trasformano in se stessi. La situazione è indicata nella figura. Le ellissi illustrano la situazione, che si avrebbe introducendo una seconda



coordinata spaziale y, il che risulterebbe nel rimpiazzare l'x^2 della (25) da $x^2 + y^2$.

Questo ci aiuta a spiegare perché $c^2\tau^2 = 0$ è chiamato "cono" della luce. I punti time-like sono indicati rispettivamente con T_+ e T_- , i punti space-like con S (formano l'esterno del cono) ed il cono stesso con C_+ e C_- . C_+ è chiamato il "cono futuro" C_- il cono passato. L'invarianza delle zone del "mondo" einsteiniano ha un preciso significato fisico. Partendo dall'origine ogni punto all'interno del cono di luce futuro (zona T_+) può essere raggiunto con un segnale che viaggia con una velocità $|v| < c$. Viceversa il punto (0,0) può essere raggiunto da un segnale che parte da un qualsiasi punto del T_- viaggiando con $|v| < c$. I punti del cono di luce si connettono all'origine solo per mezzo di segnali che viaggiano con la velocità della luce. I punti che formano il "toro" S non possono essere raggiunti da segnali che partono dall'origine $x = 0$, $ct = 0$. Eventi che sono "space-like" uno rispetto all'altro sono sempre indipendenti; non c'è possibilità di "congiura" dato che nessun segnale li può connettere.

La (25), la quale nel caso di uno spazio "reale" di tre dimensioni x,y,z dovrebbe essere rimpiazzata da

$$c^2 \tau^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad (25a)$$

definisce ciò che i matematici chiamano una "metrica" nello spazio a quattro dimensioni formato dalle coordinate x, y,, z ed il tempo misurato come ct. La metrica permette di ascrivere a ogni evento (x,y,z,ct) un numero $c\tau$, positivo all'interno del T_+, negativo all'interno del T_-, nullo sul cono della luce e - se vogliamo - immaginario in S, il quale rimane invariato sotto le trasformazioni di Lorentz.

Questa metrica è simile benché più complicata di quella delle geometria euclidea dello spazio a tre dimensioni, la quale attribuisce a ogni terna di coordinate cartesiane una "distanza" R definita da

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{26}$$

che esprime il teorema di Pitagora in 3 dimensioni. R è la distanza del punto (x,y,z) dall'origine e rimane invariato se il sistema delle coordinate è sottoposto ad una qualsiasi rotazione (o riflessione) intorno all'origine.

La differenza fra la metrica euclidea e quella einsteiniana sta nel fatto che mentre R^2 è sempre positivo o nullo, $c^2\,\tau^2$ non lo è. $R^2 = 0$ implica che il punto (x,y,z) si trova all'origine, $c^2\,\tau^2 = 0$ che l'evento (x,y,z,ct) è sul cono di luce. All'invarianza di R sotto le rotazioni corrisponde l'invarianza di $c\tau$ sotto le trasformazioni di Lorentz.

La geometria definita dalla metrica (25a) è chiamata "pseudo euclidea". Essa fu ideata dal matematico H. Minkowski, il quale, come insegnante al politecnico di Zurigo e più tardi alla università di Gottinga, ebbe importanti scambi di idee con Einstein.

IV. 3. L'invariante formata dall'energia e dall'impulso di una particella

Secondo la (18) si ha $p = m(v)v$ e secondo la (23) $E = m(v)c^2$ per l'impulso e l'energia di una particella che si muove con velocità v rispetto a un osservatore. Formando allora $E^2 - c^2p^2$ si ha

$$E^2 - c^2p^2 = m(v)^2c^4 - m(v)^2c^2v^2 = m(v)^2c^4.(1-v^2/c^2)= c^4m(v)^2/\gamma^2$$

[cfr.(10)] $= m(0)^2c^4$ e [cfr. (17)]. Si vede quindi che

$$E(v)^2 - c^2\,p(v)^2 = m(0)^2c^4 = E(0)^2 \tag{27}$$

La combinazione di E(v) e di p(v) alla sinistra della (27) è quindi una espressione che è indipendente dalla velocità v: una invariante sotto la trasformazione di Lorentz. Dalla (27) segue anche immediatamente la (24) per il caso di $m(0) = 0$ (più precisamente $p = \pm E/c$). Dato che dalla(18) e (23) segue che $v = pc^2/E$ si ha nel caso $m(0) = 0$: $v = \pm c$. Questo è esattamente il risultato già indovinato in III.4.

E' facile convincersi sulla base della (9) che le quantità p e E/c si trasformino esattamente nella stessa maniera delle quantità x e t, cioè:

$$p' = \gamma\ [p-u(E/c^2)]$$

$$E'/c^2 = \gamma\ [(E/c^2) - up/c^2] \qquad (28)$$

Generalmente (cioè in quattro dimensioni) si trova che impulso ed energia si trasformano come spazio e tempo. La sola differenza fra la (10) e la (28) è che mentre l'invariante (25) formata dalle coordinate spazio temporale può assumere valori positivi e negativi, quella formata dall'impulso e l'energia di una particella è sempre positiva: l'insieme d'impulso-energia è "time-like".

IV. 4. Conclusione

Le precedenti lezioni erano intese a spiegare il contenuto fisico della relatività ristretta di Einstein. Gli ulteriori sviluppi di questa teoria sono di natura prevalentemente matematica; tecniche per trovare a colpo d'occhio le proprietà di trasformazione di tutte le quantità fisiche. Questo scopo è raggiunto dal calcolo "tensoriale" il quale, per esempio, mette insieme le tre componenti del campo elettrico con le tre componenti di quello magnetico per formare un "tensore antisimmetrico" con proprietà di trasformazioni ben definite.

Classifica come "vettori" in uno spazio a 4 dimensioni il "vettore" che definisce la posizione (x,y,z,ct) o quello dell'energia-impulso (P_x,P_y,P_z,E/c) di una particella (i due - come abbiamo visto - si trasformano nello stesso modo). Inoltre il calcolo tensoriale fornisce un metodo (la cosiddetta saturazione degli indici) per trovare le invarianti [come T e m(0) nei casi sopraccitati]. L'ultimo mi pare il compito più importante del calcolo tensoriale, perché ci permette di individuare quelle esperienze sulle quali tutti gli osservatori posti in sistemi inerziali sono d'accordo.

Un'altra estensione della relatività ristretta;, che non si limita allo sviluppo di raffinate tecniche matematiche, è rappresentata dalla "relatività generale". Essa si propone di estendere il principio della relatività dai sistemi che relativamente si muovono rettilineamente e uniformemente ai sistemi in moto accelerato uno rispetto all'altro. Questa teoria generale (sviluppata da Einstein nel 1916) si basa sul "principio dell'equivalenza" al quale abbiamo già velatamente accennato nella prima lezione; un campo gravitazionale - come quello prodotto dalla Terra - può essere "trasformato via" in un sistema che "cede" all'accelerazione, cioè, per esempio, in un ascensore in caduta libera. L'estensione della relatività a sistemi in moto accelerato porta quindi a una approfondita analisi dei fenomeni gravitazionali. La revisione portata dalla relatività generale alla teoria gravitazionale di Newton (la mela) ci porta ad assumere che anche l'azione gravitazionale si propaghi con la velocità della luce. In più prevede che bruschi cambi nella distribuzione delle masse - i quali possono avvenire per esempio nella formazione di una "supernuova" – siano accompagnati da onde gravitazionali nello stesso modo in cui i bruschi cambiamenti nella distribuzione delle cariche conducono alla emissione di onde elettromagnetiche (hertziane).

Concludiamo ripetendo che lo scopo di una teoria di relatività sta nel trovare gli elementi della natura sui quali tutti gli osservatori possono essere d'accordo. A questo scopo è anche necessario evitare le discussioni sulle cose che sono relative, come per esempio il concetto della simultaneità. Ma - come abbiamo visto - ogni relativizzazione ci rende anche qualcosa che è assoluto.

***

NOTA SULLA FORMULA (11)

Assumiamo che per esempio $u/c = 0.1$ (una tale velocità corrisponde press'a poco alle velocità dei "nucleoni" (protoni e neutroni) all'interno dei nuclei. Abbiamo allora per $x = u^2/c^2 = 0.01$ e quindi per x^2 il valore 0.0001. Vogliamo mostrare che in buona approssimazione si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + 0(x^2).$$

Dato che $x^2 = 0.0001 \ll x = 0.01 \ll 1$, trascureremo nel seguente x^2 quanto sta accanto a 1 o x.

Le operazioni in cui un x^2 va trascurato indicheremo col segno ≈ (approssimativamente uguale). Abbiamo allora

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sqrt{1+x} \approx \sqrt{1+x+\frac{x^2}{4}} = \sqrt{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} = 1 + \frac{x}{2}$$

Nel primo passaggio abbiamo moltiplicato sia il numeratore che il denominatore con 1 + x, nel secondo abbiamo trascurato x^2 in confronto ad 1 nel denominatore, nel terzo abbiamo aggiunto la quantità trascurabile $x^2/4$ al numeratore. Per x = 0,01 si ha approssimativamente

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1.005$$

e più accuratamente = 1.005037. Si vede che la correzione (0.000037) è meno di un centesimo dell'ultima cifra nella formula approssimata (0,005). L'approssimazione è quindi buona anche per la elevata velocità u = 0,1 c. Per le velocità considerate nella meccanica classica, per esempio per la velocità del suono, si ha

$$u/c = 10^{-6},\ x = 10^{-12},\ x^2 = 10^{-24}$$

La correzione alla formula approssimativa è quindi un numero con davanti 24 zeri, mentre l'ultimo numero significativo dell'approssimazione ha solo 18 zeri. La meccanica di Galileo e Newton è quindi una ottima approssimazione anche se applicata a sistemi che si muovono con una velocità che nel tempo dei due scienziati e sulla Terra era quasi impossibile immaginare.