ANCORA SULLA MASSA

Gli urti che abbiamo preso in considerazione nella sezione precedente sono tutti anelastici e svolgentisi lungo l'asse x (o x'). I risultati che abbiamo trovato hanno però una validità generale ed, in particolare, si applicano ad urti elastici e ad urti non centrali in cui le velocità delle masse che si urtano hanno componenti lungo i tre assi x, y, e z del sistema di riferimento.

Per intendere cosa accade per componenti di velocità diverse da quelle lungo l'asse x, facciamo un esempio che illustra molto bene la situazione permettendoci di evitare inutili complicazioni di calcolo.

Consideriamo ancora un urto anelastico, questa volta di un proiettile sparato su di un blocco di legno (fissato su di una parete), in direzione parallela all'asse y (o y') come mostrato in figura 67. Il fenomeno avvenga su un riferimento S' in moto con velocità **u** rispetto al riferimento S sul quale noi ci troviamo in quiete.

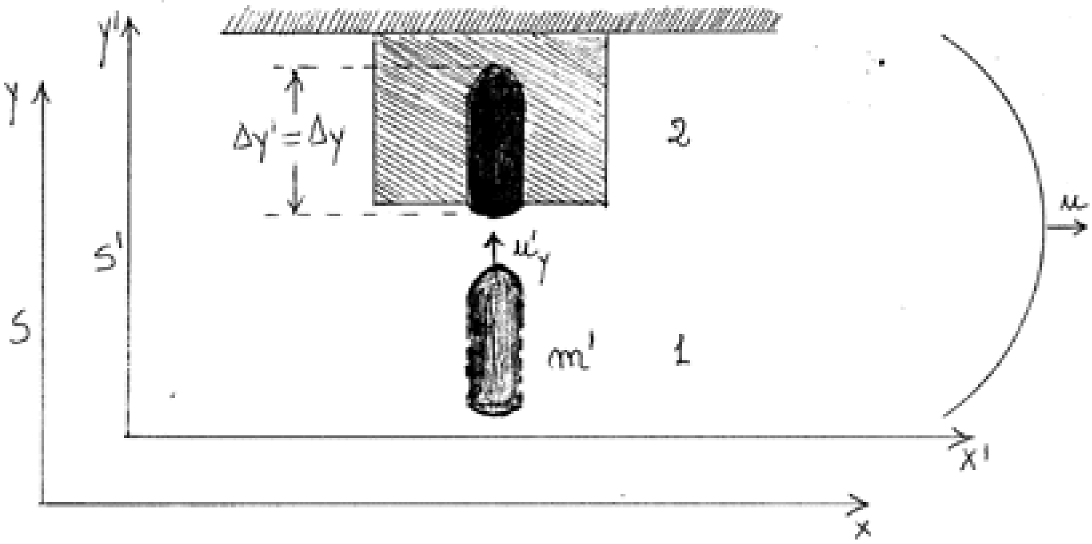

Figura 67

La posizione 1 è quella occupata dal proiettile di massa **m'** (su S') prima di essere sparato con velocità $\mathbf{u'}_y$ (su S'); la posizione 2 è quella del proiettile che ha forato il blocco di legno ed è evidente che la profondità del foro ci può fornire una misura della quantità di moto del proiettile. Supponiamo di vedere dal riferimento S il foro provocato dal proiettile. La velocità u_y che si osserva da S, ricordando la composizione delle velocità [seconda a sinistra delle (14)] e che $\mathbf{u_x = 0}$, sarà data da:

$$u_y = u_y^{'} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ed essa risulterà minore di un fattore $\mathbf{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$ della velocità **u** osservata da S'. Per altri versi le trasformazioni di Lorentz ci dicono che **y = y'** e conseguentemente che **Δy = Δy'** e ciò vuol dire che la profondità del foro osservata da S e da S' è la stessa. Diverse velocità del proiettile e stessa profondità del foro ! Ma se la profondità del foro è la stessa per i due osservatori, ambedue dovranno concludere che la quantità di moto del proiettile era la stessa**: p = p'**.

E' chiaro che per rendere conto di questo risultato (stessa quantità di moto per diverse velocità) occorre tener conto del ruolo giocato dalla massa; infatti una stessa quantità di moto, a parità di velocità, la si ha quando le masse sono differenti. Si ha allora:

$$p = p' \Rightarrow mu_y = m'u'_y \Rightarrow mu'_y \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m'u'_y \Rightarrow m = \frac{m'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

e, come già sappiamo, questa espressione può scriversi:

$$(16)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ m(v) = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

con m_o = massa a riposo del proiettile.

E' interessante fare una osservazione.

Le trasformazioni di Lorentz certamente ci assicurano che $\Delta y = \Delta y'$ e ciò vuol dire che spostamenti lungo l'asse y (o y') sono gli stessi per tutti gli osservatori inerziali. Ma le stesse trasformazioni di Lorentz ci dicono anche che il tempo Δt che occorre per effettuare un dato spostamento Δy lungo l'asse y è diverso dal tempo $\Delta t'$ necessario per effettuare uno stesso spostamento $\Delta y'$ lungo l'asse y'. E' questo fatto che, ricordando la definizione di velocità ($u_y = \Delta y/\Delta t$ e $u'_y = \Delta y'/\Delta t'$), conduce a velocità differenti ($u_y \neq u'_y$) e conseguentemente all'ammissione di massa come funzione crescente della velocità.

Vediamo ora qual è la rappresentazione grafica della (16) per renderci conto dell'entità dell'aumento di massa all'aumento della velocità (figura 68). La cosa che emerge con assoluta chiarezza è che, per piccole velocità ($v << c$) la massa è certamente una costante; per velocità prossime a quelle della luce la massa tende a diventare infinita ; ci vogliono altissime velocità per avere incrementi notevoli di massa (si pensi che ci vogliono circa 250.000 Km/s, circa 0,9c, per raddoppiare una data massa m_o).

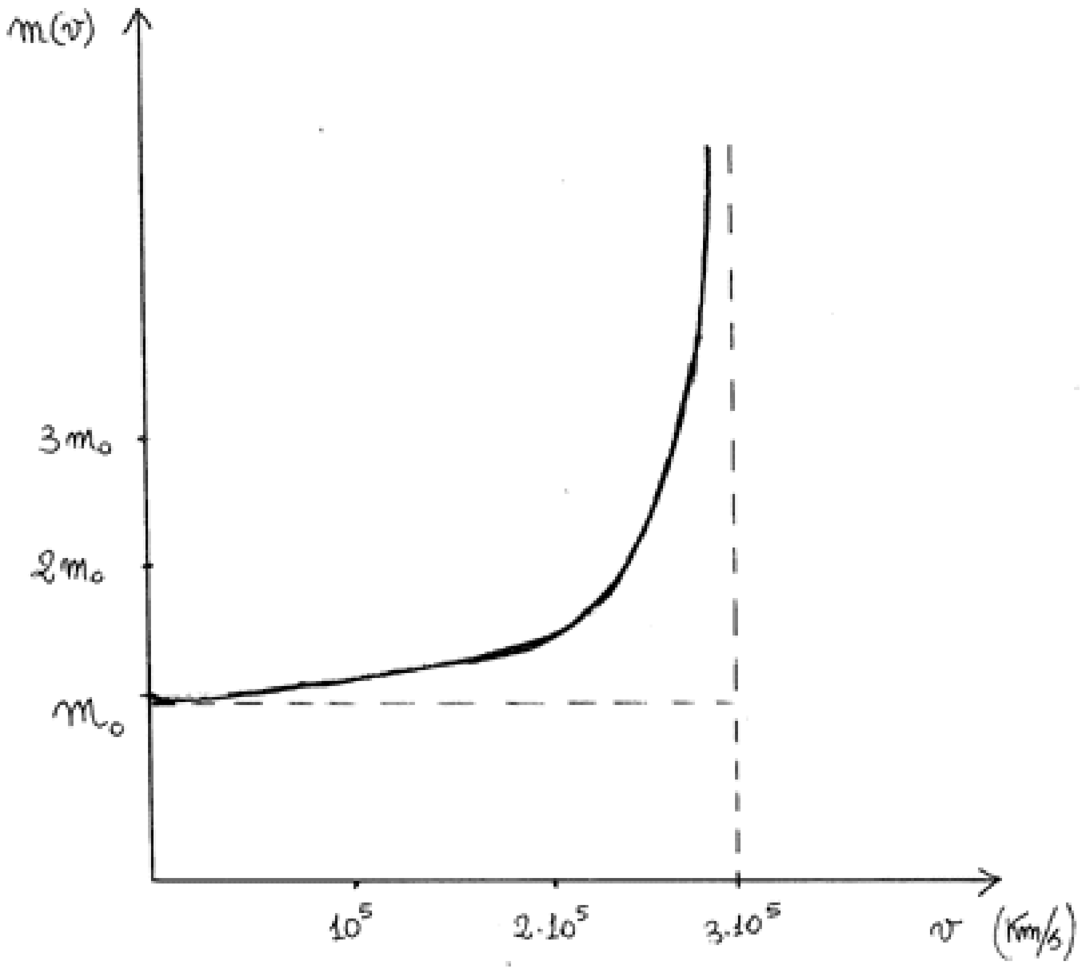

Figura 68

L'INERZIA DELL'ENERGIA

Riprendiamo in considerazione la relazione (l6) che ci fornisce la massa in funzione della velocità:

$$(16)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots m(v)=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

dove in seguito potremo porre **m = m(v).**

Ricordando lo sviluppo del binomio di Newton:

$$(18)\cdots\cdots\cdots\cdots (1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

il denominatore della (16), quando **v << c**, può essere scritto:

$$(18bis)\cdots\cdots\cdots\cdots\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{v^2}{2c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\frac{15}{48}\frac{v^6}{c^6}+\cdots\cdots\cong 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}.$$

poiché per **v << c**, i termini del 4° e 6° ordine possono essere completamente trascurati.

La (16) può allora essere scritta:

$$m\cong m_o\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)=m_o+\frac{1}{2}m_o v^2\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Come si può vedere la massa **m** risulta essere (circa) uguale alla massa a riposo $\mathbf{m_o}$ a cui è aggiunta una quantità $\mathbf{1/2.\ m_o v^2}$ (che non abbiamo difficoltà nel riconoscere come l'espressione di una energia cinetica) divisa per la velocità della luce al quadrato.

Indicando con $\mathbf{E_c = ½.m_o\ v^2}$ l'energia cinetica in oggetto, l'espressione precedente può essere scritta:

$$\mathbf{m \approx m_o + E_c/c^2}$$

oppure, moltiplicando ciascun termine per la costante $\mathbf{c^2}$:

$$\mathbf{mc^2 \approx m_oc^2 + E_c} \quad (19)$$

Osserviamo ora che i tre termini che compaiono nella precedente espressione hanno, ciascuno, le dimensioni di una energia. Poiché stiamo discutendo la cosa nell'approssimazione newtoniana (**v << c**), la quantità $\mathbf{m_oc^2}$ sarà certamente una costante che, poiché dipende dalla massa a riposo $\mathbf{m_o}$, rappresenterà qualche proprietà energetica intrinseca o di riposo (ad esempio: l'energia interna definita in termodinamica). La (19) può allora essere interpretata come l'espressione della conservazione dell'energia: l'energia totale $\mathbf{mc^2}$ è data dalla somma dell'energia cinetica $\mathbf{E_c}$ di un dato corpo e dell'energia a riposo di esso $\mathbf{m_oc^2}$. (923)

Ricavando $\mathbf{E_c}$ dalla (19):

$$\mathbf{E_c \approx mc^2 - m_oc^2} \quad (20)$$

si ha che l'energia cinetica di un dato corpo è data dalla differenza della sua energia totale e della sua energia a riposo.

La (20), cosi come l'abbiamo ricavata, è valida per **v << c**. Per generalizzarla basta osservare che l'energia cinetica di un corpo è data proprio dalla differenza delle energie che ad esso competono quando è in moto e quando è in quiete; si può così scrivere, in generale:

$$\mathbf{E_c = mc^2 - m_oc^2 \quad -> \quad E_c = (m - m_o)\,c^2 \quad ->}$$

$$\mathbf{E_c = \Delta m.c^2} \quad (21)$$

Quanto è grande l'energia di riposo di un dato corpo ?

$$m_o c^2 = 9.10^{16} .\ m_o \text{ joule}$$

si tratta di un valore enorme che ben presto vedrà schiere di fisici e non al lavoro per tirarla fuori ed *in qualche modo* utilizzarla.

Ma torniamo alla (21). E' importante non lasciare questa relazione ricavata, prima approssimativamente e quindi correttamente, con una semplice frase.

Cerchiamo di ricavare la (21) per altra via; la matematica è un poco più complessa ma i risultati non sono approssimati.

Supponiamo che un dato oggetto sia sottoposto ad una forza **F** per un tratto **x** (stiamo trattando il problema ad. una dimensione: forza, accelerazione e velocità sono tutti vettori con la stessa direzione e verso). Ricordando l'espressione (17) per la quantità di moto relativistica:

$$(17)\cdots\cdots\cdots\cdots\ p = \frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

e l'espressione (15) che ci fornisce la forza come variazione istantanea della quantità di moto:

(15) **F = Δp/Δt = Δ(mv)/Δt = dp/dt = d(mv)/dt [= m.dv/dt + v.dm/dt]**

si ha (ricordando che forza, accelerazione e velocità sono vettori con la stessa direzione e lo stesso verso):

$$(22)\cdots\cdots\ \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_o \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = m_o\left[\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] =$$

$$= m_o\left[\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}\cdot\frac{-\frac{2\vec{v}}{c^2}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right] = m_o\left[\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right] \Rightarrow$$

$$(23)\cdots\cdots\cdots\cdots\ \vec{F} = \frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Questa è dunque l'espressione della forza (si ricordi che siamo nel caso di moto rettilineo); per ottenere il lavoro **dL** fatto dalla forza **F** occorrerà moltiplicare **F** per lo spostamento **dx**. Ricordando che il lavoro fatto è uguale all'energia cinetica acquistata dall'oggetto (**dL = dE$_c$**), si ha:

$$dE_c = F \cdot dx = \frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dx = \frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dv = \frac{m_o v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot dv$$

avendo ricordato che **dx/dt = v**.

Qual è l'energia cinetica complessiva E_c che il nostro oggetto acquista nel passare dalla velocità **v = 0** alla velocità **v** ?

Occorre risolvere il seguente integrale:

$$(24)\cdots\cdots\cdots E_c = \int_0^v \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} dv = m_0\left(-\frac{c^2}{2}\right)\int_0^v \left(-\frac{2}{c^2}\right) \cdot v \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot dv = -\frac{1}{2} m_0 c^2 \left[\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_0^v =$$

$$= m_0 c^2 \left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^v = m_0 c^2 \left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right] = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2 = (m - m_0)\cdot c^2 = \Delta m \cdot c^2 .$$

Ed in definitiva si ha:

(21) $$\mathbf{E_c = \Delta m . c^2}$$

Ecco quindi ritrovata la (21) per una via certamente più elaborata ma, altrettanto certamente, più precisa. Se si ricorda che la (21) può esplicitamente essere scritta nel modo seguente:

(21 bis) $$\mathbf{E_c = mc^2 - m_0c^2 = E - m_0c^2}$$

e che alla quantità $\mathbf{mc^2}$ abbiamo assegnato il significato di energia totale **E** che compete ad un dato corpo, si ha che:

(25) $$\mathbf{E = mc^2}$$

oppure, ricordando la (16):

$$(25bis)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Non ci resta che controllare se il risultato trovato con la (24) fornisce, per l'energia cinetica $\mathbf{E_c}$, il valore classico $\mathbf{1/2\ mv^2}$ quando $\mathbf{v \ll c}$.

Considerando uno dei passaggi intermedi della (24) si ha:

$$(24bis)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 .$$

Nell'approssimazione **v << c**, che ora ci interessa, il denominatore del primo termine a secondo membro può svilupparsi come mostrato nella (18 bis). Si ha allora:

$$E_c = m_0 c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - m_0 c^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

e, come si vede, per piccole velocità si ritrova l'espressione classica per l'energia cinetica.

Ma riprendiamo in considerazione la (25). La prima semplice osservazione riguarda il fatto che $\mathbf{c^2}$ è una costante. Può sembrare banale ma qualcuno potrebbe osservare: l'energia totale **E** in dinamica classica è data dalla somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica; l'energia cinetica ha come sua espressione $\mathbf{½mv^2}$ mentre l'energia potenziale (gravitazionale) è data da **mgh**; con facili conti si può ricavare che **mgh** può essere scritta come $\mathbf{½mv^2}$ (basta ricordare che, nel nostro caso, risulta $\mathbf{g = v^2/2h}$); cosi l'energia totale **E** risulta uguale a due volte $\mathbf{½mv^2}$ e cioè $\mathbf{E = mv^2}$; qual è allora la grande novità di $\mathbf{E = mc^2}$?

Nella relazione classica la massa e' rigorosamente costante, per cui si ha:

$$\mathbf{E = k.v^2}$$

nella relazione relativistica **c** è rigorosamente costante, per cui risulta:

$$\mathbf{E = k.m}$$

Nel primo caso l'energia risulta proporzionale al quadrato della velocità, nel secondo l'energia risulta proporzionale alla massa e la costante $\mathbf{k = c^2}$ non è altro che un fattore di ragguaglio tra le unità di misura di massa e quelle di energia. Ciò vuol dire che l'energia e la massa relativistiche possono essere date con le stesse unità di misura potendosi parlare indifferentemente di grammi di energia o di joule di massa (un'energia pari a 9.10^{13} joule = 25.10^{6} Kwh ha la massa di un grammo: si può allora dire *la massa di* 9.10^{13} *joule* oppure *l'energia della massa di un grammo*).

Quanto detto ci può far intendere che parlare di conservazione dell'energia in relatività è la stessa cosa che parlare di conservazione della massa; e ciò può anche enunciarsi come conservazione della massa-energia [si osservi che moltiplicando ambedue i membri della (16) per $\mathbf{c^2}$, che è una costante, si ottiene la (25 bis)].

Si tratta di una sintesi stupenda che ingloba in sé perfino il primo principio della termodinamica: quell'energia termica che mancava all'energia meccanica, per far tornare la conservazione dell'energia meccanica, è tutta nella (25). Ora l'energia *meccanica* si conserva anche negli urti anelastici (fatto che non si verificava in meccanica classica); ora, l'energia *persa* nell'urto anelastico tra due masse uguali $\mathbf{m_0}$ (si veda quanto discusso a proposito dell'urto illustrato in figura 66) la si ritrova nella massa $\mathbf{M_0}$ risultante dopo l'urto (si ricordi che $\mathbf{M_0 > 2m_0}$) e questo perché l'urto comporta un aumento dell'energia cinetica degli atomi costituenti le due masse e ad un aumento dell'energia cinetica corrisponde in relatività un aumento di massa (là dove in termodinamica si parlava di un aumento dell'energia termica). La relazione (25) corrisponde allora ad una nuova definizione di energia termica che riconduce quest'ultima , in accordo con la teoria cinetica, ai movimenti meccanici di atomi e molecole. Ma il significato della (25) è ben più interessante se solo si pensa che quella relazione afferma, non solo la convertibilità della massa in energia (il Sole irradia nello spazio 4 milioni di tonnellate di energia luminosa ogni secondo), ma anche che l'energia può essere convertita in massa (come risulta dal processo anelastico da noi discusso).

Se, infine, riconsideriamo per un attimo la relazione (24 bis) possiamo capire il significato dell'espressione *inerzia dell'energia* che abbiamo dato come titolo a questa sezione. Se, infatti, nella suddetta relazione si considerano velocità **v** sempre più vicine a **c**, il denominatore del primo termine del secondo membro si avvicina sempre più a zero; a ciò corrisponde l'avvicinarsi ad un valore infinito del secondo membro e cioè il fatto che l'energia cinetica tende all'infinito. Ciò vuol dire che occorre un lavoro infinito per portare una data massa a velocità come quelle della luce e quindi che, al crescere della velocità, la massa in oggetto e quindi, per quanto già sappiamo, l'energia che ad essa compete tende ad aumentare al crescere della sua velocità, corrispondendo ciò ad un aumento dell'inerzia; quest'ultimo fatto ci permette di dire che l'energia presenta una inerzia poiché ad un aumento dell'energia corrisponde un aumento della massa o, che è lo stesso, all'energia corrisponde una massa inerte che offre *resistenza* ad una variazione di velocità.

NOTE

(923) Si noti che, poiché nella dinamica classica le energie vengono date a meno di costanti additive e poiché queste costanti non intervengono nei calcoli dato che si ha a che fare sempre con differenze di energia, la quantità $\mathbf{mc^2}$ che compare nella (19) può essere anche interpretata come una energia cinetica classica ($\mathbf{v} \ll \mathbf{c}$).