Il teorema di ricorrenza di Poincare, il modello di Ehrenfest ed il principio di Indeterminazione di Heisenberg.

dr.ing. Alberto Sacchi
Sviluppo Progetti Avanzati srl- R&D Dept.
ing.sacchi@alice.it

1)SINTESI (ABSTRACT)
Il presente scritto concerne una presentazione elementare ed intuitiva del Teorema di Ricorrenza di Poincaré, del Modello di Ehrenfest e delle conseguenze che ne derivano.
Viene inoltre avanzata una ipotesi euristica circa l'esistenza di una correlazione tra il Teorema di Ricorrenza ed il Principio di Indeterminazione quantistica.
The present work concerns an elementary and intuitive presentation of the Poincaré Recurrence Theorem, the Ehrenfest's Model and the resulting consequences.
It is also advanced an heuristic hypothesis about the existence a correlation between Recurrence Theorem and Quantum Uncertainty Principle

2)PREMESSA (INTRODUCTION)
-Paul Ehrenfest (Vienna, 18 gennaio 1880 – Amsterdam, 25 settembre 1933) è stato un fisico e matematico austriaco naturalizzato olandese.
-Jules Henri Poincaré (Nancy, 29 aprile 1854 – Parigi, 17 luglio 1912) è stato un matematico, un fisico teorico ed un filosofo francese.
-Werner Karl *Heisenberg* (Würzburg, 5 dicembre 1901 – Monaco di Baviera, 1º febbraio 1976) è stato un fisico tedesco. Premio Nobel per la Fisica nel 1932.
-Ludgwig Boltzmann (Vienna, 20 febbraio 1844 – Duino, 5 settembre 1906) matematico austriaco è stato uno dei più grandi fisici teorici di tutti i tempi.

La formalizzazione matematica delle leggi naturali e delle loro cause comporta rigore concettuale, quantificazione dei fenomeni ad esse connessi, precisione descrittiva e sinteticità; per contro spesso porta ad una de-intuitività (almeno per i non addetti ai lavori) dei fenomeni e delle loro conseguenze.
Descrivere in linguaggio naturale le leggi della natura può generare fraintendimenti semantici e logici, mancanza di rigore concettuale e difficoltà nel quantificare cause ed effetti, ma permette di fornire risultati e dati in forma immediatamente comprensibile.
L'impiego di esempi condotti su modelli reali ed estremamente semplici può rendere ancora più evidente il contenuto concettuale di leggi, teorie o principi fisici.

Con Newton e le Leggi della Dinamica e della Gravitazione si è venuto consolidando il paradigma scientifico che l'esatta conoscenza delle leggi naturali possa condurre, almeno teoricamente, alla conoscenza del futuro. Infatti la fisica newtoniana è costruita in modo che, conoscendo lo stato iniziale di un sistema , si può calcolare il suo stato futuro. Tale convinzione fu generalizzata da Laplace che scrisse: “"*Un'intelligenza che, ad un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui è animata la natura e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se per di più fosse abbastanza profonda per sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi."*
Se alla parola "causalità" si da un significato restrittivo si ottiene un paradigma "deterministico" per le leggi di natura le quali, partendo dallo stato attuale di un sistema, determinano univocamente il suo stato futuro.

Su determinismo e casualità in natura si è andato creando un vivace dibattito scientifico, particolarmente nel corso del XVIII e IXX secolo collegato all’idea di libero arbitrio, con le evidenti conseguenze di tipo etico che derivano dalla impossibilità di “libera scelta” generata dalla ineluttabilità deterministica.

Ed è stata proprio la nascente termodinamica statistica, dovuta a J.C.Maxwell e, soprattutto, a L.E.Boltzmann a generare le massime controversie, sul finire del IXX secolo, tra deterministi e sostenitori della casualità.
Storicamente rilevante la disputa scientifica tra Ernest Zermelo e Ludgwig Boltzmann che portò Eherenfest a ideare l’ esperimento volto a validare l’ ipotesi statistica nonché a confermare fattivamente il Teorema di Ricorrenza.
Scriveva Boltzmann*: L’articolo di Zermelo mostra che i miei scritti sono stati fraintesi; [...] il teorema di Poincaré, che Zermelo spiega all’inizio del suo articolo, è chiaramente corretto, ma la sua applicazione alla teoria del calore non lo è. [...] Perciò, quando Zermelo conclude dal fatto teorico che i [macro]stati iniziali del gas si ripresenteranno in futuro – senza avere calcolato quanto tempo questo richieda – che le ipotesi della teoria dei gas devono essere respinte oppure cambiate in maniera fondamentale, egli è come il giocatore di dadi che ha calcolato che la probabilità di una successione di cento 1 non è zero, e allora conclude che il dado deve essere truccato perché non ha ancora osservato tale successione!*
Boltzmann 1866

3)PAROLE CHIAVE (KEYWORD)
ricorrenza, spazio delle fasi, coordinate generalizzate, casualità, determinismo, indeterminazione,

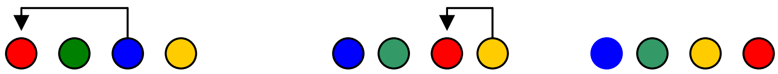
4)TEOREMA DI LIOUNVILLE (LIOUNVILLE’S THEOREM)

Se i punti dello spazio delle fasi che rappresentano configurazioni diverse ma stesso stato macroscopico sono distribuiti in modo regolare, allora si può definire una densità di configurazioni $\rho\,(q_i, p_i, t)$ *nell'intorno del punto* (q_i, p_i)*. Il teorema di Liouville stabilisce che la derivata temporale totale di tale densità è nulla. (da Wikipedia).*

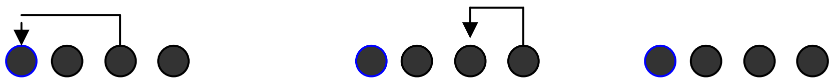
Una formulazione più intuitiva porta a considerare un esempio elementare relativo ad un sistema di 4 sferette identiche ed indistinguibili in cui sia ABCD il macrostato (stato macroscopico) considerato.
Ad esso corrispondono i seguenti 24 stati aventi diversa configurazione ma, in ragione della indistinguibilità delle sfere, sostanzialmente identici

ABCD BACD CABD DABC
ABDC BADC CADB DACB
ACBD BCAD CBAD DBAC
ACDB BCDA CBDA DBCA
ADBC BDAC CDAB DCAB
ADCB BDCA CDBA DCBA

Può risultare fuorviante aver identificato con lettere dell’alfabeto sfere per definizione indistinguibili, ma la esemplificazione grafica di cui a figura seguente può fugare il dubbio.



Qualora le sfere fossero indistinguibili (ad esempio tutte nere) le 3 situazioni illustrate risulterebbero strettamente identiche.



Si supponga di disporre le sfere su di un vassoio di dimensioni finite e di identificare la posizione di ogni sfera con due parametri (X ed Y) riferiti ad una sistema di coordinate cartesiane coincidente, ad esempio, con uno spigolo del vassoio.
Il vassoio venga ora agitato in modo da movimentare le sfere con moto casuale

La coordinata spaziale può essere sintetizzata come segue:

$$q_i = X_i, Y_i \quad \text{con } i = 1,2,3,4,5\ldots\ldots\ldots N$$

essendo N = numero delle sfere (nel nostro caso i =4).

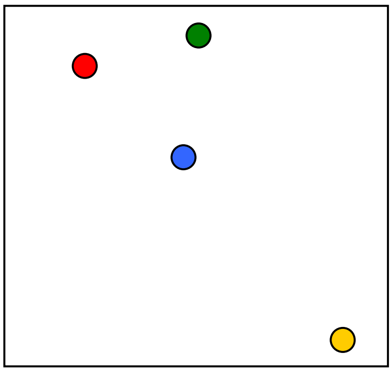
Ogni sfera possiede poi una velocità (o una quantità di moto mv ≈ v essendo m identica per ogni sfera).

Sia allora : $p_i = V_i \quad \text{con } i = 1,2,3,4$

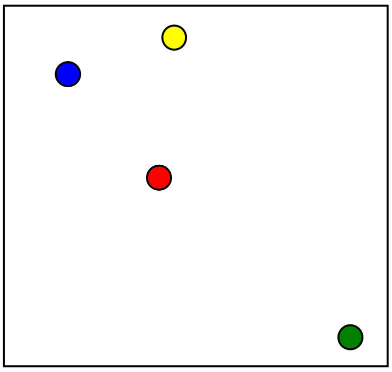
Sia q_i che p_i varieranno con il tempo t, in ordine alla dinamicità del sistema ma sia q_i che p_i assumeranno solo valori finiti a causa delle dimensioni finite del vassoio.
Tutte le posizioni q_i e le velocità delle 4 sfere costituiscono quello che viene definito *spazio delle fasi*.

Se viene fissato un preciso punto delle spazio delle fasi cioè una ben preciso valore di X_i e Y_i per tutte e 4 le sfere nonché un ben preciso valore delle rispettive velocità, il Teorema di Liounville afferma che rimane costante il numero di microstati le cui sferette abbiano tali valori.

In altri termini si può pensare che le 4 sfere (ABCD) occupino al tempo t_0 una ben precisa posizione all'interno del vassoio X_AY_A; X_BY_B ; X_CY_C; X_DY_D ed abbiano velocità definite V_A; V_B ; V_C; V_D;
Se ρ_0 è il numero di microstati che occupano tale configurazione (nell'esempio specifico il solo macro stato ABCD) il Teorema di Liounville afferma che ρ_0 rimane costante nel tempo non ostante il moto caotico impresso al sistema.
Ciò significa che in X_i,Y_i (i = 1,2,3,4) si troveranno comunque 4 sfere con velocità V_i benché ai valori di X_Ay_A si potrà trovare la sfera B oppure la D o la C e la velocità V_A potrà appartener ad un'altra delle 3 sfere restanti.
Ciò che permane costante nel tempo è il numero di microstati, cioè che comunque 4 sfere (qualsiasi tra le A,B,C,D) si trovino nelle posizioni X_AY_A; X_BY_B ; X_CY_C; X_DY_D ed abbiano velocità definite V_A; V_B ; V_C; V_D.



Tempo t_0
densità $\rho_0 =1$



Tempo $t_0 +\Delta t$
densità $\rho_0=1$

5)TEOREMA DI RICORRENZA

Sia dato un sistema dinamico con spazio delle fasi limitato, ovvero con volume finito, e sia P un punto di tale spazio. Allora per ogni intorno D_0 di P esiste un punto P'$\in$ D_0 che ritornerà in D_0 in un tempo finito.

In modo strettamente equivalente il Teorema di Ricorrenza stabilisce che: *nell'evoluzione di un sistema dinamico che ha uno spazio delle fasi limitato, il sistema può trovarsi in uno stato arbitrariamente vicino a quello di partenza dopo un tempo sufficientemente lungo.*

Il Teorema di Ricorrenza ha come premessa necessaria il Teorema di Liounville e, pur conservando una estesa generalità, è stato enunciato con particolare riferimento al II Principio della Termodinamica.
Esso, nella classica formulazione di Kelvin- Clausius, afferma che; *in un sistema chiuso è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di trasferire calore da un corpo freddo ad uno più caldo.*

Paradigma storicamente affermato sino al IXX secolo è stato quello di considerare il II Principio come Legge deterministica e, pertanto, immutabile ed inviolabile; solo con la Termodinamica Statistica di Boltzmann (1872) tale paradigma è profondamente mutato.

Premesso che la relazione intercorrente tra la velocità media molecolare e la temperatura è: $V_{ms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ (con M= massa molare e R= costante gas), si pensi ad un gas contenuto in un recipiente chiuso, diviso al suo interno da un setto , in cui le molecole più veloci (rispetto al valore medio) siano concentrate da un lato (lato caldo a temperatura TC) del setto e le molecole più lente dal lato opposto (lato freddo a temperatura TF).

Tolto il setto, il moto termico casuale provvederà, in un tempo relativamente breve, al completo mescolamento ; le molecole avranno mediamente la medesima velocità, la temperatura del gas in tali condizioni sarà quindi TF < Tgas< TC.

Il Teorema di Ricorrenza prevede, che in un tempo finito, si ripristini la condizione iniziale; ciò impone che parte delle molecole a velocità media (temperatura equivalente Tgas) si trasferiscano nella zona a temperatura TC con passaggio di calore da una zona fredda (Tgas) ad una più calda (TC).

Ciò in netta antitesi con il II Principio della Termodinamica.
Esperimenti mentali volti a falsificare il II Principio furono proposti sia da Maxwell (con il famoso diavoletto di Maxwell) che da Feynman (cricchetto di Feynman) rivelatisi comunque infruttuosi.

In particolare il ritorno alla condizione iniziale di un sistema complesso è sempre estremamente elevato. Lo stesso Boltzmann ribatteva alle obiezioni di Zermelo che affinché un solo cm^3 di gas possa riportarsi spontaneamente alle condizioni iniziali richiederebbe un tempo notevolmente superiore all'età stimata dell'Universo (10^{17} s).

Considerazioni più generali saranno riprese al paragrafo " Interpretazioni del Teorema di Ricorrenza – Freccia del Tempo".

6)URNE DI EHRENFEST
Paul Ehrenfest con la moglie Tatiana sviluppò il Modello che porta il suo nome nel 1907. Obiettivo era quello di sottoporre a validazione sperimentale la teoria statistica di Ludwig Boltzmann, di cui Eherenfest era stato allievo.
Studiare sistemi complessi composti da quantità notevolissime di elementi con metodi statistico probabilistici servì a Boltzmann come strumento per spiegare il comportamento di sistemi complessi molto popolati.

Siano:

- A e B due contenitori
- N il numero di sferette identificate con numeri progressivi da 1 ad N
- N_A e N_B il numero di sfere contenute rispettivamente in A e in B

Naturalmente sarà: Na + N_B = N

Sia fornita una sequenza di numeri casuali compresi tra 1 ed N, (ad esempio estraendo casualmente da un ulteriore contenitore dei biglietti numerati da 1 ad N) e spostando la sferetta avente tale numero dal contenitore in cui si trova nel contenitore restante.

- K il numero di operazioni di estrazione e spostamento sferette

Dall'Analisi Combinatoria si ricava che:

- W = numero delle combinazioni generante la distribuzione $\{N_A / N_B\}$
- $\{N_A / N_B\}$ = distribuzione delle sfere N_A in A ed N_B in B
- $W = \dfrac{N!}{N_A! N_B!}$

L'entropia termodinamica è data dalla famosa equazione di Boltzmann:

- $S = k \log \dfrac{N!}{N_A! N_B!}$
- k = costante di Boltzmann = $1{,}381 \cdot 10^{-23}\ JK^{-1}$

Essa è pertanto vista come una funzione di W, cioè del numero di microstati in grado di generare la $\{N_A / N_B\}$.
Benché una trattazione completa e dotata di esemplificazioni numeriche sia reperibile in ogni scritto di Termodinamica Statistica e di Analisi Combinatoria comunque elencati in Bibliografia un cenno banalmente elementare può essere d'aiuto alla comprensione.

Sia N = 4 (αβγδ) ed i contenitori di cui al Modello siano A e B.
Le 4 sfere possono essere distribuiti in A e B secondo i seguenti 5 Macrostati $\{N_A/N_B\}$

A	B	
//	●●●●	{0/4}
●	●●●	{1/3}

●● ●● {2/2}
●●● ● {3/1}
●●●● // {4/0}

cui corrispondono le seguenti possibili combinazioni di elementi (Microstati)

{0/4}		{1/3}		{2/2}		{3/1}		{4/0}	
A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
0	αβγδ	α	βγδ	αβ	γδ	βγδ	α	αβγδ	0
		β	αγδ	αγ	βδ	αγδ	β		
		γ	αβδ	αδ	βγ	αβδ	γ		
		δ	δβγ	βγ	αδ	δβγ	δ		
				βδ	αγ				
				γδ	αβ				
1		4		6		4		1	

Totale = 16 Microstati $= 2^4$

In generale:

Totale Microstati $= 2^N$

La probabilità che si verifichi un Macrostato qualsiasi corrisponde al numero dei Microstati che lo possono generare diviso il numero totale di Microstati.
Ad esempio la probabilità che si verifichi:

- il Macrostato {1/3} è 4/16 = 25%
- il Macrostato {0/4} è 1/16 = 6%
- il Macrostato {2/2} è 6/16 = 37,5%
- il Macrostato {4/0} è 1/16 = 6%
- il Macrostato {3/1} è 4/16 = 25%

In perfetto accordo con la Termodinamica classica si verifica che lo stato avente maggiore probabilità è quello cui corrisponde una equiripartizione degli elementi tra le due zone A e B; cioè il Macrostato {2/2}

- In generale $W = \dfrac{N!}{N_A!N_B!}$

- Probabilità $P = \dfrac{N!}{N_A!N_B!2^N}$

Ciò che in questa sede è però interessante evidenziare è che la sperimentazione condotta con il Modello di Eherenfest mette in evidenza fluttuazioni dell’Entropia per K sufficientemente elevato che tendono a diminuire al crescere di N.
Esse indicano una inversione locale dell’Entropia in antitesi con il II Principio e nel pieno rispetto delle leggi statistiche che governano il fenomeno.

7)INDETERMINAZIONE QUANTISTICA
Il Teorema di Ricorrenza fa riferimento ad un punto P dello uno spazio delle fasi e ad un suo intorno D_0 (comunque limitato) in cui il sistema si posizionerà dopo un tempo finito.

Analiticamente se Xi, Y_i (i = 1,2,3….N) sono le coordinate (in uno spazio fisico supposto bidimensionale in analogia con l'esempio di paragrafo 4) e V_i le velocità relative il Teorema afferma che esisterà un istante T_0 in cui le Xi + dX_i , Y_i +dV_i e le V_i +dV_i si verificheranno nuovamente.
dX_i x dY_i e dV_i determinano un intorno differenziale D_0 del punto P; è in tale intorno che cadrà il punto P' rappresentante lo stato del sistema dopo un tempo finito.

Nel 1927 Werner Karl Heisenberg enunciò il principio che porta il suo nome e che si riferisce ai parametri dinamici di particelle elementari.
Dette σ_x e σ_p rispettivamente la deviazione standard di posizione (x) e di quantità di moto (p) di una particella (nel caso di particelle di massa identica la p=v) il Principio di Indeterminazione stabilisce che:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{h}{4\pi}$$

dove h è la costante di Planck = $6{,}626.10^{-34}$ J.s

II microscopico valore di h rende ridottissima la dimensione dell'intorno D_o entro il quale è posizionato il punto P' in cui verrà a ritrovarsi il sistema in un tempo finito; in tali condizioni è possibile affermare che Il sistema ritornerà (prima o poi) nella identica situazione iniziale.

8)INTERPRETAZIONI DEL TEOREMA DI RICORRENZA- FRECCIA DEL TEMPO
In Fisica Classica si è andata consolidando l'interpretazione che l'aumento dell'entropia di un sistema complesso chiuso (quindi, al limite dell'intero Universo) indichi la direzione della Freccia del Tempo.
D'altra parte la dinamica dei costituenti elementari del sistema (atomi o molecole) è simmetrica rispetto al parametro Tempo.
Ciò significa che una inversione del tempo, non modifica l'equazione del moto se non per la direzione del vettore spostamento.
Banalmente se una particella si muove da A a B nel tempo T, secondo la dinamica classica essa nel tempo –T si muoverà da B ad A lungo la medesima traettoria.

Il paradosso di Loschmidt (1876) afferma che in base a tale considerazione il ritorno di tutte le componenti elementari di un sistema macroscopico alle condizioni iniziali

(Teorema di Ricorrenza) deve corrispondere ad una inversione della freccia del tempo.
In altri termini una trasformazione rigorosamente irreversibile non dovrebbe essere possibile ossia se esiste una transizione di un sistema dallo stato A allo stato B tale da comportare un aumento di Entropia, il ritorno allo stato A deve comportare una sua diminuzione.

Il Teorema di Ricorrenza di Henri Poincarè può essere considerato la base scientifica di numerose filosofie di tipo "circolare".
Da quella dell'Eterno Ritorno di Friedrich Nietzsche al concetto di palingenesi, presente nella filosofia di Anassimandro, Pitagora, Empedocle ed Eraclito.
Il concetto di Reincarnazione è infine riscontrabile sia presso gli indiani tligt dell'Alaska che nel Libro dei Morti dell'antico Egitto, così come nel testo sacro indonesiano Upanisad (800 a.C.) o nella Legge del karma tipica del buddismo (VI sec. a.C.).
D'altra parte anche il cristianesimo nascente prevedeva la reincarnazione predicata da Origene, teologo cristiano del 250 d.C.

9)BIBLIOGRAFIA

1- F. Guerra - Reversibilit`a/Irreversibilit`a, Enciclopedia Einaudi Volume XI, (Torino 1980).
3- C. Cercignani-Ludwig Boltzmann: the man who trusted atoms-(Oxford University Press1998)
4- H. Poincarè´-Le mecanisme et l'experience-Revue de Metaphysique et deMorale (1893)
5- P. Ehrenfest and T. Ehrenfest -The conceptual foundation of the statistical approach in mechanics
(Cornell University Press, New York 1956)
6- A. Sacchi – Metodo Montecarlo & Entropia statistica – www. fisicamente. net
7- A Sacchi – Diavoletto di Maxwell e cricchetto di Feynman - www. fisicamente. net
8- W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt quantentheoretischen Kinetik und Mechanik*, in
« Zeitschrift für Physik», XLIII, 1927, pp. 172-198. Tr. it. *Sul contenuto osservabile della*
cinematica e della meccanica quanto teoretiche.
9- W. Heisenberg, Über die Grundprinzipien der «Quantenmechanik», in «Forschungen und
Fortschritte», III, 1927.
10- www1.mate.polimi.it/~zucca/ita/didattica/2002-03

.