Interpretazione puramente geometrica del trasporto vettoriale parallelo

SINTESI (abstract)
Modellazione puramente geometrica del trasporto vettoriale parallelo su di una varietà bidimensionale immersa in uno spazio ambiente R^3.
Geometric modelling of parallel vector transport on two dimensionale variety in 3D space.

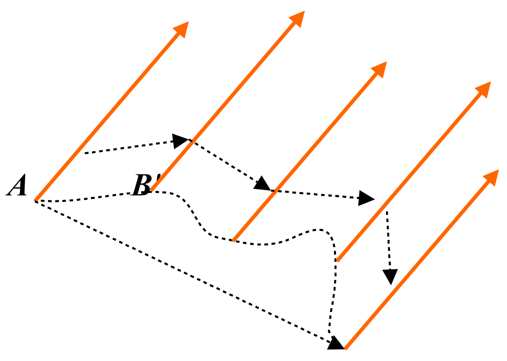
PAROLE CHIAVE (keyword)
trasporto parallelo, varietà n dimensionale, modello grafico, superficialità

NOTA (preliminary note)
Il prof. Tullio Levi Civita, unitamente al Prof. Ricci Curbastro, fu padre della geometria differenziale assouta così come impiegata da Albert Einstein per la formalizzazione matematica della Teoria della Relatività Generale.
Egli scriveva in " Lezioni di geometria differenziale assoluta"
Avviene frequentemente in geometria analitica che relazioni algebriche di forma complicata traducano proprietà geometriche semplici, si che , mentre quelle relazioni algebriche mal si prestano ad essere enunciate in parole, si può invece, usando il linguaggio delle geometria, esprimere le equivalenti relazioni geometriche in modo chiaro, conciso ed accessibile all'intuizione; spesso poi le relazioni geometriche sono più facili da scoprire che non quelle analitiche corrispondenti, si che il linguaggio geometrico fornisce non solo un espressivo mezzo di esposizione , ma anche un efficace strumento di ricerca.

La posizione espressa da Tullio levi Cività è tanto più vera quanto più le proprietà geometriche semplici di cui egli scrive vengano rese intuitive tramite figure geometriche; per i limiti imposti dalla natura umana esse saranno rappresentate da superfici bidimensionali curve in una spazio 3D.

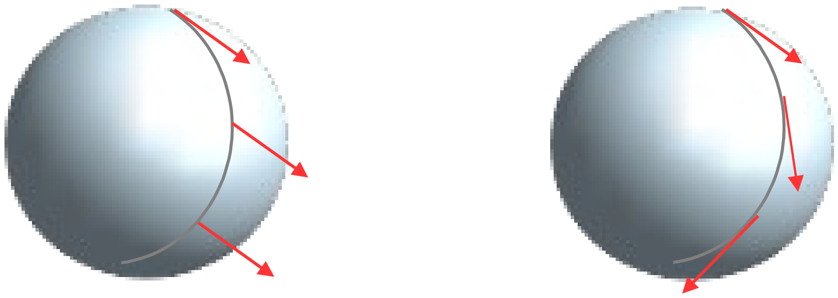
Ovviamente la rappresentazione grafica , se pur ridotta a varietà bidimensionali immerse in un spazio ambiente 3d, comporta la rinuncia al rigore ed alla precisione che il calcolo tensoriale consente ammettendo, per contro, una immediata comprensione dei concetti espressi.

TRASPORTO VETTORIALE
Il trasporto parallelo di un vettore giacente su di un piano euclideo è intuitivo; esso corrisponde all'applicazione in ogni punto del vettore originario di vettori identici in modulo direzione e verso.
Esso può avvenire lungo un segmento di retta o lungo una curva piana arbitraria; condizione necessaria è che la linea di trasporto si mantenga nel piano.



B *FIG.1*

Per superfici euclidee non piane si verifica la impossibilità del rispetto contemporaneo delle condizioni di parallelismo e superficialità (appartenenza alla superficie).



Parallelismo e mancanza di superficialità ***Superficialità e mancanza di parallelismo***

FIG.2

Con riferimento ad una superficie sferica si sposti il vettore V lungo una geodetica (cerchi massimi per una sfera)   di un tratto infinitesimo ds passando dal punto A al punto B.

La superficie sferica può approssimarsi ad un piano in un intorno dΣ di A con un errore del II ordine; ne segue che ds appartiene sia al piano che alla sfera ed il trasporto parallelo può avvenire con modalità euclidee.

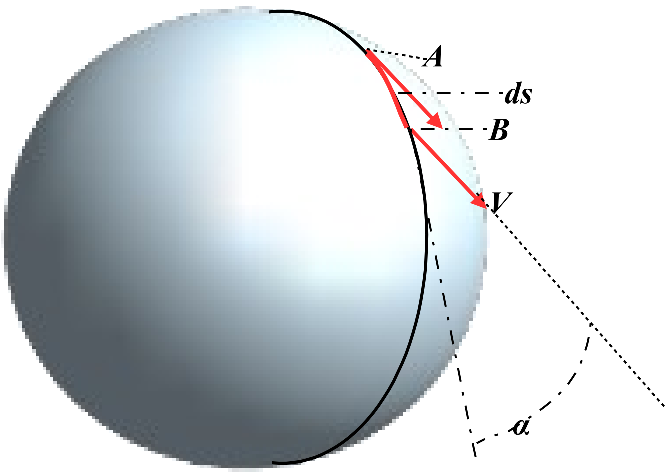


FIG.3

Il vettore V trasportato parallelamente risulta ruotato di un angolo α rispetto alla tangente in B; se V giace su di un piano a tangente alla superficie sferica, il vettore V' post spostamento, giacerà sul piano b, ruotato rispetto ad a (Fig.4)

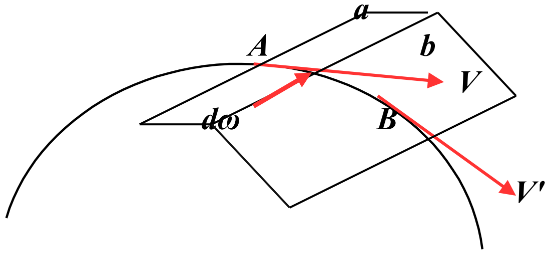
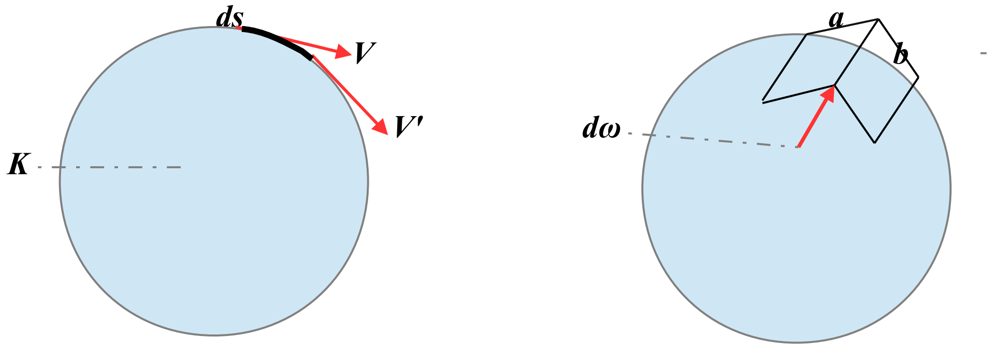


FIG.4

Il vettore rotazione = dω rappresenta la rotazione del piano a rispetto al piano b; esso ha modulo Vds , direzione parallela all'asse di rotazione coincidente con l'intersezione dei piani a e b e verso corrispondente all'avanzamento di una vite destrorsa.
Graficamente si ha (Fig.5)



ds , V e V' giacciono nel piano K ***dω è normale al piano K***

FIG.5

L'equazione

$$(d\vec{V}) = \vec{V}\; x\, (d\vec{\omega})$$

rappresenta la variazione vettoriale subita da V a seguito della rotazione dei piani di giacenza. dV ha modulo V.dω e direzione normale a V ed a dω quindi:

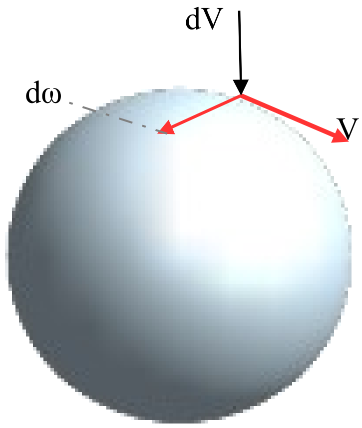


FIG.6

Quindi : $\vec{V}' = \vec{V} + d\vec{\omega}$

è l'equazione vettoriale che graficamente può essere rappresentata come segue (Fig.7)

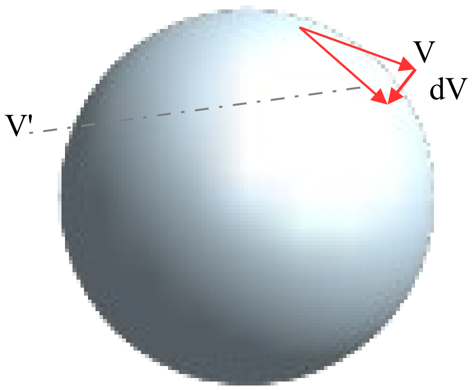
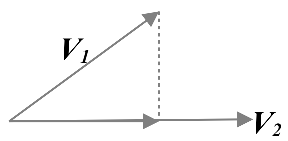


FIG.7

Lo spostamento del vettore V di un tratto ds lungo una geodetica comporta la rotazione di un angolo dα; V' rappresenta il vettore V post spostamento.

Si ricorda che il prodotto scalare di due vettori è la prodotto del modulo del primo per la proiezione del modulo del secondo sul primo, in caso di vettori ortogonali tale prodotto è sempre nullo.



Poiché dV e ds sono ortogonali si ha.

$$dV.ds = 0$$

o, riferito alle componenti cartesiane dei due vettori:

$$dV_{ij.}ds = 0 \quad i,j = 1,2,3$$

La equazione dV.ds= 0 rappresenta l'equazione simbolica del parallelismo.

E' di elevato interesse lo studio dello spostamento parallelo quando esso passa dal valore differenziale ds ad un valore finito; sempre con l'obiettivo di poterne fornire una rappresentazione grafico-geometrica nel seguito ci si riferisce ad una superficie curva bidimensionale nota: la superficie conica..
L'operazione grafica proposta ha evidenti limiti e contiene qualche grave trasgressione al rigore logico ma rende evidente lo spostamento direzionale di un vettore trasportato parallelamente lungo una curva su di una superficie curva.

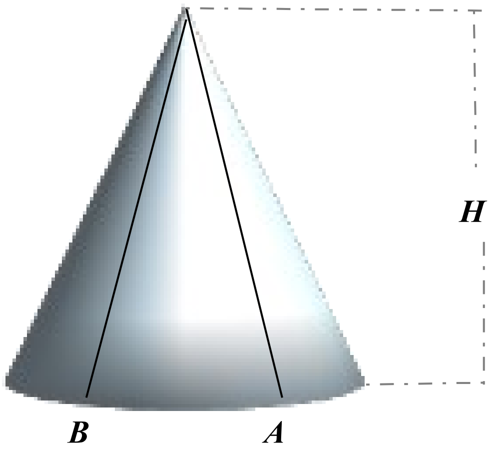


Fig. 8

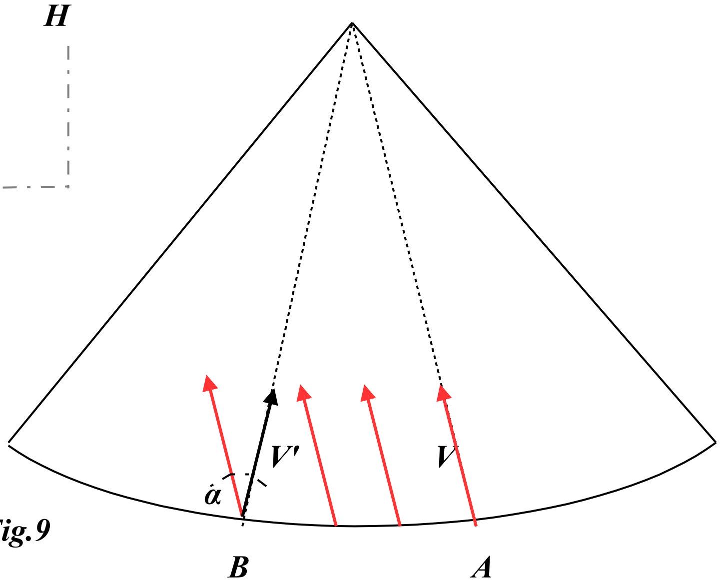


Fig.9

Dato un cono di altezza H e raggio di base R si voglia trasportare il vettore V dal punto A al punto B giacenti sulla geodetica costituita dalla base.
Il cono è una superficie sviluppabile, quindi equivalente alla superficie piana di Fig.9 su cui è possibile il trasporto parallelo con modalità euclidee.
Il vettore V, dopo il trasporto parallelo, si trova ruotato di un angolo α rispetto al vettore V' giacente sulla superficie conica.

Sostanzialmente differente la situazione su di una superficie non sviluppabile, ad esempio quella di una sfera .
Poiché il trasporto di un vettore su di una superficie curva è una operazione prettamente geometrico-cinematica, il processo logico entro cui esso di sviluppa è rappresentabile con una serie figure.
Naturalmente ciò prescinde dalla possibilità di quantizzare le singole fasi del processo che rimane affidata al calcolo tensoriale assoluto.

Siano :
P e Q i punti di λ tra di cui il vettore V viene trasportato parallelamente.
s la linea arbitraria di trasporto
π il piano tangente alla sfera in P
N la tangente a π in P e quindi anche a λ Fig.10.1

N individua una fascio di piani tali da intersecare π secondo rette su cui giacciono tutti i vettori appartenenti a π e quindi tangenti a λ; tra di essi anche il vettore V che si vuole trasportare. Fig. 10.2

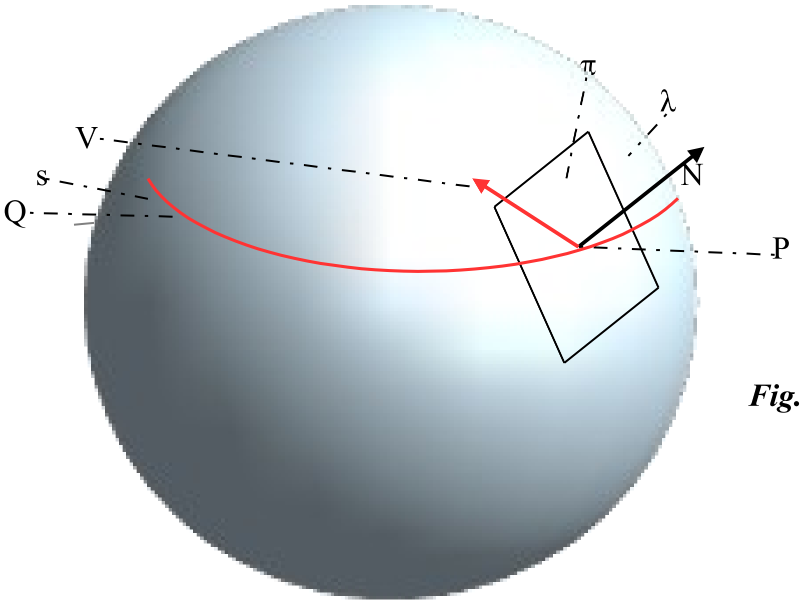


Fig.10.1

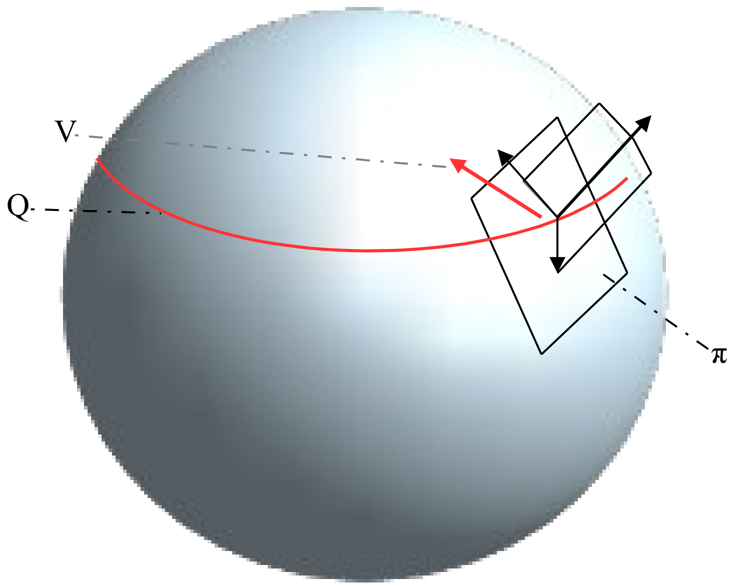


Fig.10.2

Ora si tratta si far "scivolare" il piano π da P a Q lungo la linea s. Fig.10.3

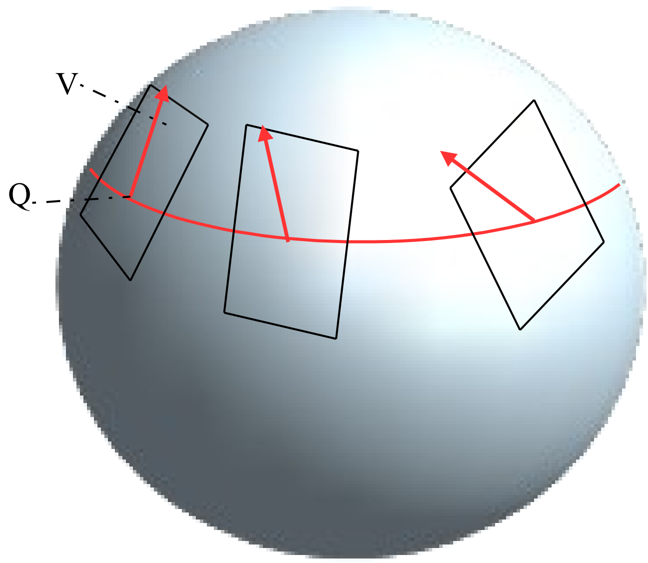


Fig.10.3

Il percorso logico prevede quindi di far "scivolare" il piano tangente contenente il campo vettoriale tangente alla superficie sferica in P , (contenente il vettore V) lungo la curva s.

Il vettore V rimane in tale modo tangente alla superficie sferica (in quanto appartenente al piano tangente in ogni punto di s) e contemporaneamente, è soggetto ad una sorta di pseudo parallelismo in quanto il piano tangente viene fatto scorrere lungo s senza subire rotazioni.

Ricordando che il trasporto parallelo differenziale ha equazione caratteristica:

$$dV_{ij.}ds = 0 \quad i,j = 1,2,3$$

l percorso logico-geometrico illustrato è equivale alla sua integrazione lungo s.