

Real models vs scientific exactness

semplici modelli reali possono chiarire complesse leggi fisiche

If you can't explain it simply, you don't understand it well enough
Albert Einstein

INTRODUZIONE (Preface)

La letteratura scientifico-divulgativa ricorre sovente a modelli facilmente comprensibili ed intuitivi.

Più rara è una diretta correlazione tra i parametri del modello e quelli equivalenti nella formalizzazione matematica delle corrispondenti leggi fisiche.

E se è bensì vero che le leggi fisiche sono sempre derivate o confermate da esperienze reali non sempre è intuitivo comprenderle ricorrendo ad esse; più immediata è la loro comprensione se il modello adottato si riferisce alla esperienza quotidiana.

In tale contesto appare significativa la frase pronunciata da un tecnico della manutenzione della Università degli Studi di Milano, di fronte al Dipartimento di Fisica Teorica: “ufficio complicazione cose semplici”

SINTESI (Abstract)

Esempi di modellizzazione intuitiva delle più note leggi fisiche e di alcuni operatori e teoremi di calcolo differenziale vettoriale, con evidenziazione della stretta correlazione tra i parametri del modello e quelli delle corrispondenti leggi formalizzate.

1) EQUAZIONI DI MAXWELL (Maxwell Equations)

1) La prima Equazione di Maxwell in forma integrale recita: *il flusso del vettore Campo Elettrico (\mathbf{E}) attraverso una superficie chiusa (Σ) è proporzionale alla carica Q che lo ha generato*

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.1.1)$$

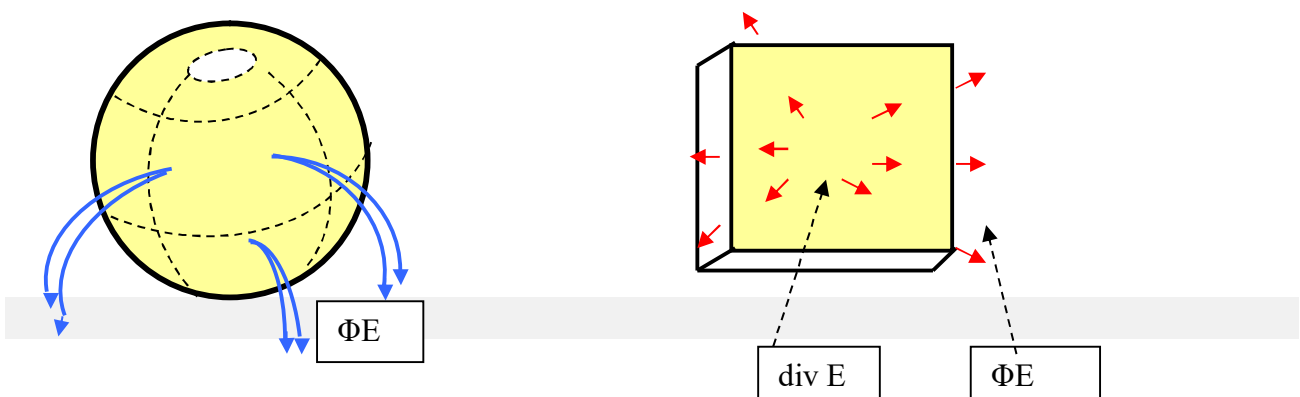
Il modello cui si può fare riferimento è quello di un pallone elastico riempito con un liquido e la cui superficie sia dotata di numerosi piccoli fori.

La portata complessiva uscente da essi nel tempo t (ΦE) e successivamente raccolta in un contenitore, dipende direttamente (è direttamente proporzionale) alla quantità totale di liquido contenuta nel pallone (Q). (FIG.1a)

Il passaggio dalla forma integrale alla forma differenziale (locale) richiede l'applicazione del Teorema di Gauss (Teorema della divergenza) che afferma: *il flusso di un campo vettoriale E attraverso una superficie chiusa Σ coincide con l'integrale della divergenza del campo E nel volume V di cui la superficie Σ è frontiera:*

$$\int_v \nabla \bar{E} dv = \int_{\Sigma} E d\Sigma \quad (1.1.2)$$

Il modello intuitivo corrispondente è quello di una scatola chiusa; da un generico punto del volume interno si diparte, allontanandosi in direzione generica (diverge) un dardo che attraversa, nel suo percorso, la superficie della scatola in un determinato punto. Estendendo tale fenomeno ad ognuno degli infiniti punti del volume interno si ottiene che l'allontanamento (divergenza) di tutti gli infiniti dardi interni è uguale alla quantità degli stessi attraversanti le pareti della scatola. (FIG.1b)



La I Equazione in forma differenziale è ricavabile dalla sua espressione in forma integrale (1.1.1) con elementari passaggi logici ($\int (p=q)$ e $(q=r) \cap (p=r)$).

Definita:

$$\rho = \text{densità di carica} = \text{carica per unità di volume} = \frac{dQ}{dv} \text{ si ottiene:}$$

$$dQ = \rho dv \quad \text{da cui} \quad Q = \int_v \rho dv$$

$$\text{dalla (1.1.1)} \quad \Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\int_v \rho dv}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv \quad (1.1.3)$$

Per definizione di flusso secondo una superficie.

$$\Phi_E = \int_{\Sigma} \bar{E} d\Sigma \text{ che, per la (1.1.2) diviene } \Phi_E = \int_{\Sigma} \bar{E} d\Sigma = \int_v \nabla \bar{E} dv \text{ e per la (1.1.3)}$$

$\Phi_E = \int_v \nabla \bar{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv$; i due integrali della presente equazioni sono estesi al medesimo campo (v) e pertanto, essendo tra loro uguali, lo devono esserlo anche le funzioni integrande, cioè:

$$\nabla \bar{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

che rappresenta la I Equazione in forma locale

2) La seconda Equazione di Maxwell in forma integrale recita: *il flusso del vettore Campo Magnetico (\mathbf{B}) attraverso una superficie chiusa (Σ) è sempre nullo.*

$$\Phi_{\mathbf{B}} = 0 \quad (1.2.1)$$

Il modello cui fare riferimento è quello di un contenitore chiuso contenente n biglie metalliche alla temperatura di t gradi Celsius e altrettante identiche biglie alla temperatura di - t gradi Celsius. Il contenitore sia immerso in un ambiente a temperatura di 0 C°. Il flusso di calore uscente dal contenitore è, in tali condizioni, sempre nullo.

Ammissa la identità delle sfere (massa e calore specifico) la loro temperatura complessiva risulta essere 0 C° annullando in tale modo ogni flusso di calore con l'esterno anch'esso a temperatura 0 C°.

La inesistenza di monopoli magnetici impone che all'interno di una qualsiasi superficie chiusa Σ possano esservi sia poli magnetici positivi (N) che negativi (S) con uguale carica magnetica. Il flusso di campo \mathbf{B} uscente da Σ è pertanto sempre nullo.

3) La III Equazione di Maxwell in forma integrale recita: *la Forza Elettromotrice (f.e.m) indotta da un campo magnetico \mathbf{B} in una linea chiusa (circuito) confine della*

superficie attraversata dal flusso \mathbf{B} è proporzionale all'opposto della variazione nel tempo di \mathbf{B}

$$\text{f.e.m} = \oint_L \bar{E} dl \quad (3.1)$$

$$\text{f.e.m} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \Phi(\bar{B})}{\partial t} \quad (1.3.2)$$

Il modello intuitivo cui fare riferimento prende avvio dalle equazioni: (1.3.1) e (1.3.2) nonché dalla definizione di flusso del vettore \mathbf{B} : $\Phi_B = \int_{\Sigma} \bar{B} d\Sigma$ da cui:

$$\oint_L \bar{E} dl = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \Phi(\bar{B})}{\partial t} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \int_{\Sigma} \bar{B}}{\partial t} = - \frac{1}{\mu_0} \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \text{forza elettromotrice (f.e.m)} \quad (1.3.3)$$

Un agricoltore lavora alla creazione di un piccolo canale irriguo attorno al suo campo.

La fatica energetico muscolare (f.e.m.) è pari al lavoro compiuto cioè a $\oint_L F dl$ dove F rappresenta la forza impressa alla vanga per penetrare il terreno ed L è la lunghezza complessiva del canale.

Egli decide inoltre di falciare l'erba del proprio campo scoprendo che la f.e.m. che si compie è direttamente proporzionale alla velocità con cui falcia il campo.

In termini matematici

$$\text{f.e.m} = - \frac{1}{b} \int_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

essendo:

- b il coefficiente di proporzionalità
- Q l'area della superficie falciata
- Σ l'area totale del campo di cui L è il contorno = lunghezza canale irriguo

Quanto più velocemente aumento l'area falciata tanto maggiore è la fatica energetico muscolare

Dalle relazioni espote:

$$\text{f.em. (sforzo energetico muscolare)} = \oint_L F dl = - \frac{1}{b} \int_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (1.3.4)$$

che appare formalmente identica alla (1.3.3)

La forma differenziale della III Equazione di Maxwell richiede la preliminare definizione dell'operatore rotore:

Sia \mathbf{F} un campo vettoriale continuo e derivabile; $\text{rot}\mathbf{F}$ è definito in ogni punto P del campo come un vettore avente per modulo l'integrale di linea chiusa L cui tende l'area Σ attorno a P quando Σ tende a zero e per direzione la normale a \mathbf{F} nel punto P .

$$\text{rot}\bar{\mathbf{F}} = \lim_{\Sigma \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Sigma} \oint_L \mathbf{F} dl \right) \quad (1.3.5)$$

che sviluppata da luogo a:

$$\text{rot}\bar{\mathbf{F}} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \quad (1.3.6)$$

Il Teorema del rotore (Teorema di Kelvin-Stokes) recita: l'integrale del rotore di un vettore \mathbf{F} esteso alla superficie Σ uguaglia l'integrale di \mathbf{F} lungo una linea chiusa L costituente il confine di Σ .

$$\int_{\Sigma} \text{rot}\bar{\mathbf{F}} d\Sigma = \int_L \bar{\mathbf{F}} dl \quad (1.3.7)$$

Il modello bidimensionale cui fare riferimento è quello di un coriandolo circolare di superficie Σ in una vasca contenete acqua. La vasca è corredata da un foro di scarico in modo che il moto dell'acqua in prossimità dello stesso sia rototraslatorio (FIG.3a)

Con riferimento alla figura

$$V_2 = V_x$$

$$V_1 = (V_x + \partial V_x / \partial y)$$

$$V_2 - V_1 = V_x - (V_x + \partial V_x / \partial y) = -\partial V_x / \partial y$$

con rotazione antioraria.

Nello spostamento da V_2 a V_1 la V_x aumenta di dy corrispondente al diametro verticale del coriandolo

$$V_3 = V_y$$

$$V_4 = (V_y - \partial V_y / \partial x)$$

$$V_3 - V_4 = V_y - (V_y - \partial V_y / \partial x) = \partial V_y / \partial x$$

con rotazione oraria

La rotazione netta in senso orario è allora $\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$

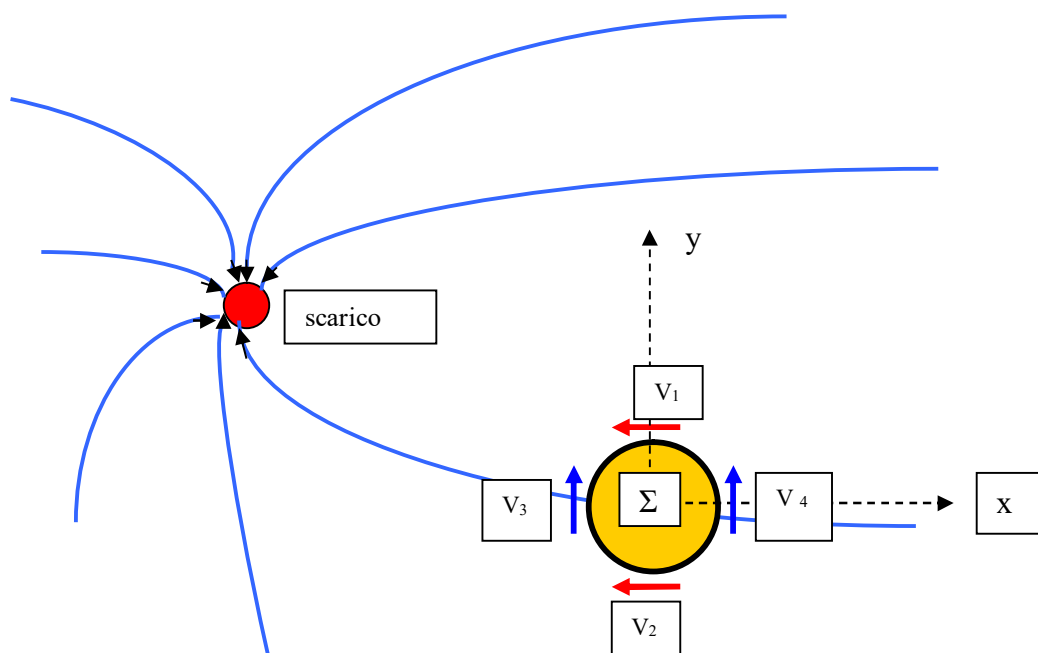


FIG.3a

Facendo convergere a zero la superficie Σ si ottiene: $\text{rot } V = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$ nel punto

$P \equiv \Sigma$.

Questa è la situazione bidimensionale relativa al piano xy ; nel caso di un campo tridimensionale dove il coriandolo è sostituito da una biglia si ottiene, corrispondentemente, la (1.3.6) operando sui piani zx e zy .

La formulazione locale della III Equazione di Maxwell prende avvio da:

$$\text{f.e.m} = \oint_L \bar{E} dl \quad (1.3.8)$$

$$\text{f.e.m} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \Phi(\bar{B})}{\partial t} \quad (1.3.9)$$

$$\int_{\Sigma} \text{rot} \bar{E} d\Sigma = \int_L \bar{E} dl \quad (1.3.10)$$

Ne deriva:

$$\int_{\Sigma} \text{rot} \bar{E} d\Sigma = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \Phi(\bar{B})}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \int_{\Sigma} B}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

Essendo i due integrali estesi al medesimo campo Σ sono uguali anche le funzioni integrande, cioè:

$$\text{rot} \bar{E} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad \text{III Equazione di Maxwell} \quad (1.3.11)$$

4) La IV Equazione di Maxwell è la simmetrica della (1.3.11) rispetto a \mathbf{B} ed è espressa, in forma differenziale, da:

$$\text{rot} \bar{B} = \mu_0 i + \mu_0 J_s = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (1.4.1)$$

dove J_s è definita corrente di spostamento (nel vuoto).

In forma integrale essa recita: *La Corrente di Spostamento (J_s) generata da un campo elettrico \mathbf{E} in una linea chiusa (circuito) confine della superficie attraversata dal flusso \mathbf{E} è proporzionale alla variazione nel tempo del campo elettrico \mathbf{E} .*

Il modello intuitivo che ne deriva è quindi quello descritto a paragrafo 3) ove \mathbf{E} viene sostituito il vettore \mathbf{B} e viceversa.

2) EMISSIONE FOTOELETTRICA (Photoelectric emission)

L'effetto fotoelettrico è l'emissione di elettroni da una superficie S (generalmente metallica) prodotta dall'incidenza di radiazione elettromagnetica di frequenza f , quantizzata in fotoni aventi energia $E = hf$.

La condizione per l'estrazione di elettroni aventi energia di estrazione W (funzione del materiale di S) è $E \geq W$.

Il modello di riferimento consiste in un vaso di cristallo colpito con un numero indefinito di urti da parte di palline da tennis a bassa velocità non in grado di produrre fratture o rotture del vaso benché l'energia complessiva di tutti gli urti possa risultare elevata.

Per contro un unico urto violento prodotto con un martello metallico genera rottura benché la sua energia possa risultare inferiore a quella cumulata da n urti di palline da tennis.

3) ENTROPIA (Entropy)

Viene definito Macrostatato di un sistema termodinamico lo stato definito dai valori di pressione e temperatura a cui corrispondono diverse configurazioni microscopiche (Microstati) definite da posizione e velocità di tutti gli enti elementari che lo compongono supposti indistinguibili.

Indicato con Γ lo spazio delle fasi dei Microstati, la definizione statistica di Entropia S è:

$$S = k_B \ln \Gamma \quad (3.1)$$

Il modello cui fare riferimento, ben noto e riportato in ogni scritto di Termodinamica Statistica, è quello di un contenitore piano in cui sono poste N sferette identiche.

Il contenitore è diviso mediante colorazione in due parti S = zona sinistra = Rosso; D = zona destra= Blu

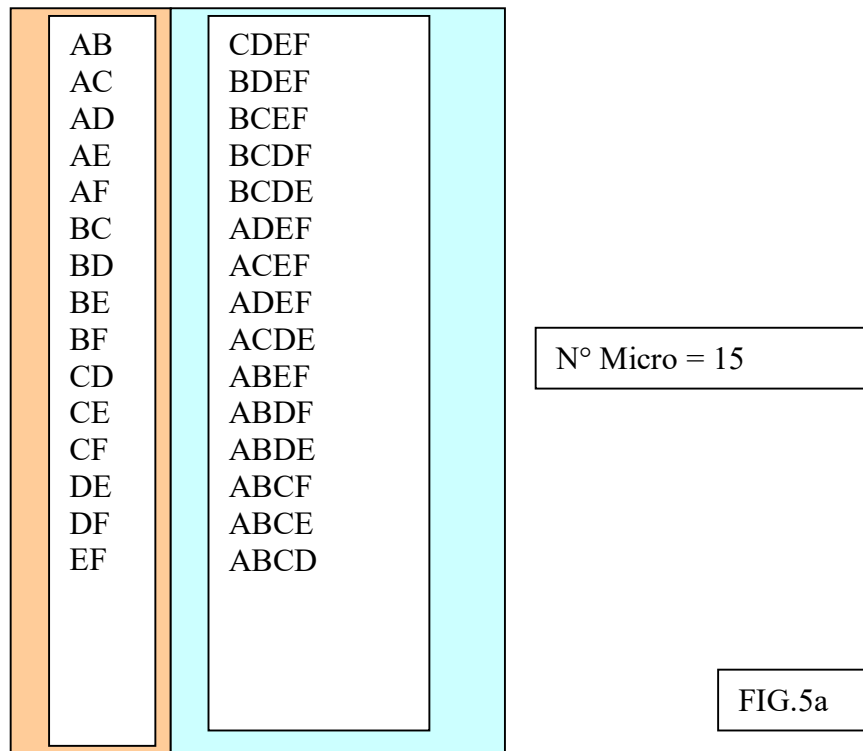
Nota posizione è velocità iniziale delle sferette e supposta assenza di attriti, il moto delle stesse a seguito di urti elastici reciproci e con le pareti del contenitore è determinato in ogni istante dalle leggi deterministiche della dinamica.

Peraltro l'indeterminatezza di tutti i parametri del moto ed il numero di equazioni funzione di N rende il moto apparentemente casuale e quindi sono vevoli le leggi della Statistica.

Si intende calcolare l'Entropia del Macrosistema N (m/n) ove, posto $N=6$, $m=4$, $n=2$ equivale alla distribuzione di 2 sfere in S (Rosso) e 4 in D (Blu).

Le sfere siano identificate con A, B, C, D, E, F

Macro 2,4 (due sfere in Rosso e 4 sfere in Blu)



Generalizzando sulla base dell'algebra combinatoria.

$$N(m/(N - m)) = \frac{N!}{m! \cdot (N - m)!}$$

La equazione di Boltzmann, nel modello considerato, fornisce il valore dell'entropia:

$$S = k_B \cdot \ln 15 = 2,71 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Costante di Boltzmann = $k_B = 1,3806488 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$

4) EQUAZIONE D'ONDA (Wave equations)

Per onda si intende il trasporto di una perturbazione nello spazio senza comportare un trasporto netto della materia del mezzo che occupa lo spazio stesso.

L'equazione delle onde (equazione di D'Alembert) è una equazione differenziale alle derivate parziali iperbolica funzione della variabili spaziali e del tempo.

Detta $f = f(x,y,z)$ la funzione rappresentante la perturbazione si ha:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} \quad (4.1)$$

Il modello utilizzato per illustrare la (4.1) è la propagazione di un'onda elastica monodimensionale, ad esempio quella di una chitarra, ancorata agli estremi.

In funzione della modesta entità della deformazione della sua geometria rispetto all'andamento rettilineo, si ammettono le seguenti approssimazioni:

$ds = dx =$ arco differenziale di curva = differenziale della sua ascissa

$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen} \alpha = dy/dx$.

Si considerino due punti di ascissa x e $x+dx$ e si calcolino le componenti verticali della tensione T della corda in detti punti.

Con riferimento a (FIG. 4a) si ha:

$$\text{- punto di ascissa } x: \quad -T_y = -T \operatorname{sen} \alpha = -T \tan \alpha = -T \frac{\partial y}{\partial x}$$

dove il segno meno deriva dall'orientamento dell'asse y

$$\text{- punto di ascissa } x + dx \quad T_y = T \tan \beta = T \frac{\partial y}{\partial x} dx + T \frac{\partial dy}{\partial x} dx = T \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx$$

dove, essendo $dy = \partial y / \partial x$ la derivata seconda di dy sarà $\partial^2 y / \partial x^2$

Nel tratto $ds = dx$ il peso della corda è:

$$\rho g ds = \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

con $g =$ accelerazione di gravità

$\rho =$ densità della corda

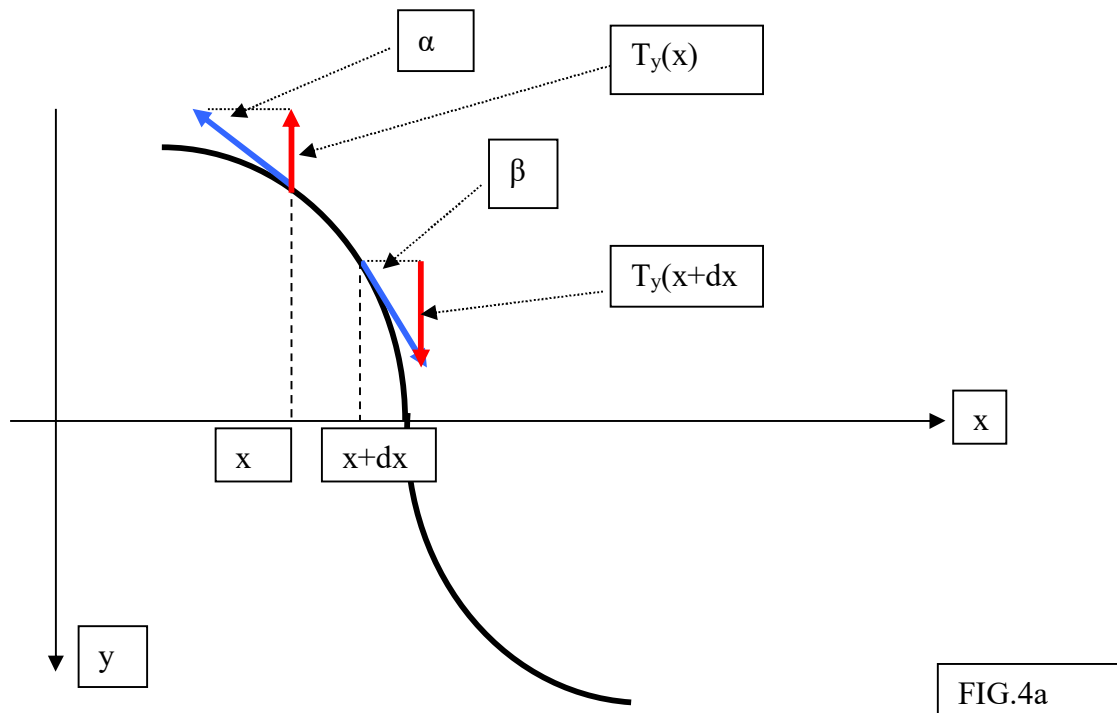
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{ accelerazione verticale} = g$$

Il bilancio delle forze secondo l'asse Y è allora:

$$T_y(x) + T_y(x+dx) = -T \frac{\partial y}{\partial x} dx + T \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx = \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{e semplificando } T \text{ e } dx$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

che corrisponde alla (4.1) per un sistema monodimensionale (corda elastica) in uno spazio bidimensionale (x,y) .



5) EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES (Navier- Stokes equations)

Le equazioni di Navier-Stokes rappresentano il comportamento di un fluido continuo e deformabile. Esse sono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali.

1) A prima equazione afferma che:

«resta invariata nel tempo la massa contenuta in un volume elementare (deformabile) in moto in fluido avente velocità V »

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{V}) \quad \text{Equazione di Continuità} \quad (5.1)$$

Il modello bidimensionale cui fare riferimento è quello di una gabbia in rete metallica a forma cubica di spigolo L contenente una certa quantità Q di bicarbonato, immersa in un canale d'acqua avente velocità V_x diretta secondo l'asse x (FIG.5.1.a)

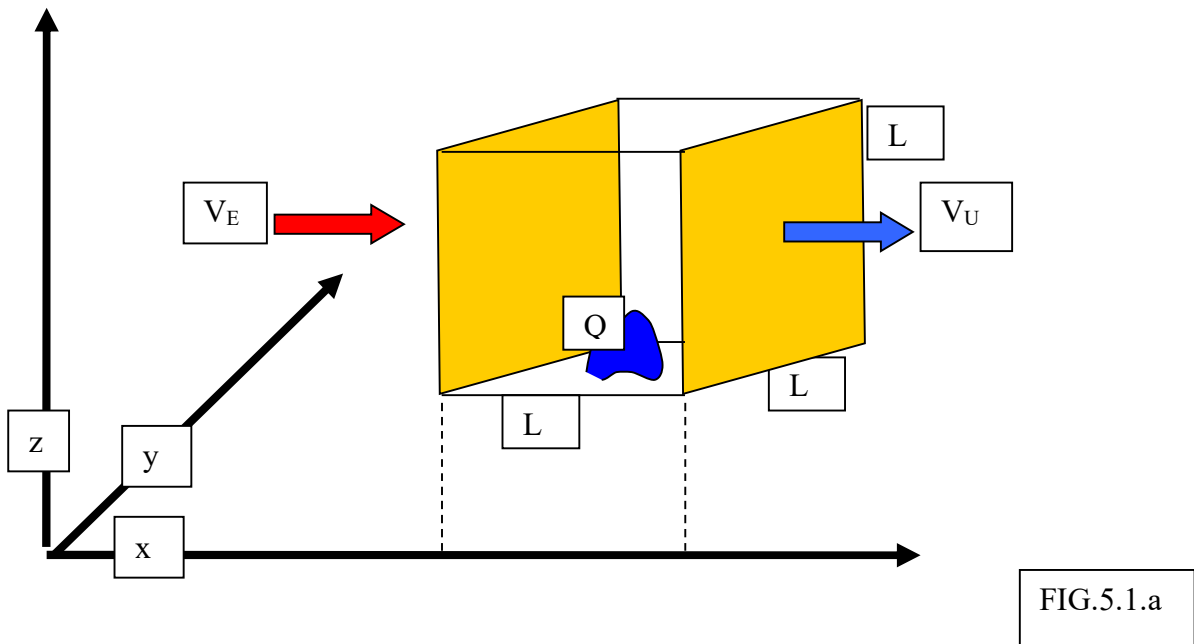


FIG.5.1.a

La massa di acqua entrante sarà = alla portata in volume (cioè velocità x superficie) per la densità ρ

$$Q_E = V_E L^2 \rho_E$$

Mentre le portata uscente sarà $Q_U = V_U L^2 \rho_U$ dove ρ_U è aumentata per effetto dello scioglimento del bicarbonato.

La velocità di scioglimento della massa di bicarbonato, cioè $\frac{\partial Q}{\partial t}$ corrisponde alla

variazione della densità dell'acqua cioè a $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ e, quindi alla portata di acqua uscente

avente maggior densità per effetto dello scioglimento del bicarbonato $\frac{\partial \rho V}{\partial x}$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho V}{\partial x}$. Nel caso particolare che non vi sia scioglimento di sali la densità ρ

rimane costante e si ottiene quindi $\frac{\partial \rho V}{\partial x} = 0$ (1° equazione di Eulero)

2) La seconda equazione di Navier Stokes stabilisce che:
«la variazione temporale della quantità di moto di un sistema coincide con la risultante delle forze esterne al sistema »

$$\frac{\partial M \bar{V}}{\partial t} = f_E \quad (5.2)$$

Il modello intuitivo di riferimento è quello di un cubo solido di massa M e spigolo L immerso in un flusso di acqua avente velocità V diretta secondo l'asse x . Le forze agenti sul cubo sono: la forza peso agente secondo la direzione verticale e quindi, nel modello in esame, influente e le forze di pressione agente sulle facce L^2 del cubo.

Sulla faccia avente coordinata x sia p_x la pressione mentre sulla faccia avente coordinata $x+dx$ la pressione sarà $p_x + \frac{\partial p}{\partial x}$; pertanto la forza netta agente sul cubo

$$\text{sarà } \frac{\partial p}{\partial x} L^2 = f_e = f_E$$

Per la 1° Legge della dinamica $f = ma = m dV/dt$ si ha:

$$\frac{\partial p}{\partial x} L^2 = f_E = \frac{\partial M \bar{V}}{\partial t} \text{ cioè la (5.2)}$$

3) La terza equazione afferma che:

La variazione nell'unità di tempo dell'energia totale del fluido contenuto in un volume unitario V , sommata al flusso netto di energia cinetica totale sulle facce di tale volume uguaglia la somma della potenza delle forze agenti sull'elemento di fluido contenuto in V e del flusso netto di energia termica trasmessa attraverso la superfici di V per conduzione.

$$\text{Variazione temporale di energia totale} = \text{potenza } P_T = \frac{\partial E}{\partial t} = \Phi E = \nabla E \rho V$$

- E = energia totale
- P = densità del fluido
- V = velocità del fluido

è la somma di:

- P_S dovuta agli sforzi viscosi
- P_P dovuta alla pressione p
- P_D dovuta alla densità
- P_T dovuta al flusso di calore

$$P_T = P_S + P_P + P_c + P_T$$

$$\nabla E \rho \bar{V} = \frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla p \bar{V} + \nabla^2 \bar{S} \bar{V} + \sum_i^{x,y,z} \rho q_i V_i - \nabla \Phi_c \quad (5.3.1)$$

Il modello adottato è relativo al caso particolare di un fluido perfetto in moto laminare

- incompressibile (sia annulla il primo addendo della (5.3.1))
- non vorticoso (si annulla in II addendo della (5.3.1))
- isoterma $T = \text{cost}$ (si annulla il IV addendo)

Le equazioni che ne risultano costituiscono una semplificazione di quelle di Navier Stokes e sono note come Equazioni di Bernoulli.

Si consideri un tratto di corrente fluida di lunghezza Δl e sezione S (FIG.5.1.b)

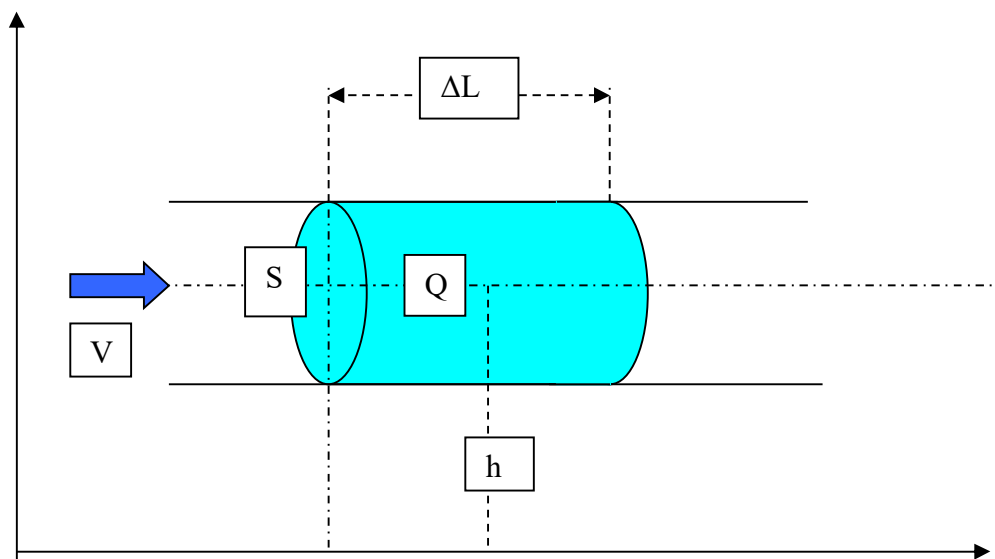


FIG.5.1.b

La massa fluida contenuta nel volume $S\Delta L=Q$ è ρQ con ρ = densità del fluido.

Il lavoro necessario affinché la pressione p spinga ρQ attraverso S è:

$$L_{\text{pressione}} = E_{\text{pressione}} = pS\Delta L \text{ dove } pS = \text{forza e } \Delta L = \text{spostamento} = pQ$$

$$L_{\text{gravità}} = E_{\text{gravità}} = g \rho Q h = \text{peso} \cdot h$$

$$L_{\text{dinamico}} = E_{\text{dinamica}} = \frac{1}{2} \rho Q V^2 \text{ dove } V = \text{velocità di flusso}$$

Per il Principio di Conservazione dell'energia:

$$+E_{\text{totale}} = E_{\text{pressione}} + E_{\text{gravità}} + E_{\text{dinamica}} = \text{costante} = pQ + g \rho Q h + \frac{1}{2} \rho Q V^2$$

che semplificando Q

$$p + g h + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{costante}$$