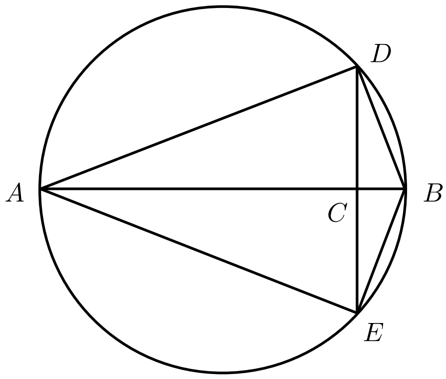
Formula che collega il π con un'infinità di radici quadrate annidate l'una dentro l'altra

Fausto Vezzaro

sitofausto@gmail.com

Svilupperemo la dimostrazione in 15 passaggi numerati. Nella prima parte della dimostrazione faremo riferimento alla figura seguente, nella quale in cerchio è da considerarsi unitario (ha raggio 1)



1. L'area del triangolo ADB può essere scritta in questi due modi equivalenti

$$\frac{\overline{BD} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2}$$

2. $\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{DB}^2}$

3. Poiché il cerchio è unitario, $\overline{AB} = 2$

4. Poniamo $\overline{BD} = s_{2n}$ per indicare che è, per ipotesi, il lato di un poligono regolare di $2n$ lati inscritto nel cerchio unitario

5. Per le ipotesi fatte nel punto 4, deve essere $\overline{DE} = s_n$, quindi $\overline{DC} = \frac{s_n}{2}$

6. Sostituendo il punto 2 nel punto 1 o poi gli $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$ del punti 3, 4 e 5 nell'espressione ottenuta, otteniamo

$$s_n = s_{2n}\sqrt{4 - s_{2n}^2}$$

7. Osserviamo che n non può essere minore di 2, visto che già per $n = 2$ il poligono inscritto degenera in un segmento. Quindi $2n$ non può essere minore di quattro. Ciò significa che s_{2n} non può essere maggiore di $\sqrt{2}$ (lato del quadrato inscritto nel cerchio unitario).

8. Elevando a quadrato l'equazione trovata in 6 e risolvendo rispetto a s_{2n} troviamo $\sqrt{2 \pm \sqrt{4 - s_n^2}}$ (non consideriamo la soluzione negativa, spuria per ovvi motivi geometrici, ovviamente emersa a causa dell'elevamento a quadrato). Considerato poi che s_{2n} deve essere minore di $\sqrt{2}$ (vedi punto 7)
$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

9. Dalla formula che abbiamo trovato in 8, e dal fatto che s_4 (lato del quadrato inscritto nella circonferenza unitaria) vale $\sqrt{2}$ otteniamo
$$s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

10. Dalla formula ottenuta in 8 si verifica per sostituzione che se s_n ha la forma $\sqrt{2 - \sqrt{\alpha}}$, allora
$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{\alpha}}}$$
cioè ha la stessa forma (ad α è stato sostituito $2 + \sqrt{\alpha}$). Quindi il processo può essere reiterato
$$s_{4n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\alpha}}}} \qquad s_{8n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\alpha}}}}}$$
e così via.

11. Il punto 10 indica che se esiste un poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio unitario, il cui lato ha lunghezza scrivibile nella forma $\sqrt{2 - \sqrt{\alpha}}$, possiamo trovare facilmente la lunghezza del lato del poligono regolare inscritto nel cerchio unitario con $2n$ (e $4n$, $8n$, ecc.) lati.

12. Abbiamo visto nel punto 9 che s_8 ha la forma richiesta dal punto 11 quindi
$$s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \qquad s_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \qquad \ldots$$

13. In base a quanto visto nel punto 10, il procedimento del punto 12 può virtualmente essere reiterato all'infinito, mantenendo le stesse caratteristiche. Concludiamo che se il poligono regolare inscritto nel cerchio unitario ha

ha 2^n lati, il numero totale di radici quadrate nella formula per trovare s_{2^n} è $n-1$. Abbiamo una formula per trovare il lato (s_{2^n}) di tale poligono:

$$s_{2^n} = \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}}_{n-1 \text{ radici quadrate}}$$

14. Moltiplicando s_{2^n} per 2^n otteniamo il perimetro, che per n grande va a coincidere, per definizione, con 2π

$$2^n \cdot \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}}_{n-1 \text{ radici quadrate}} \xrightarrow{n\to\infty} 2\pi$$

15. È facile a questo punto riordinare in (è sottinteso che il limite va fatto passando per numeri interi)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(2^n \cdot \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}}_{n \text{ radici quadrate}} \right) = \pi}$$