Alberto Sacchi

I Numeri Transfiniti

Premessa

Ma che diavolo sono i Numeri Transfiniti?
Avevamo imparato a scuola a conoscere i Numeri Interi, le frazioni cioè i Numeri Razionali,gli Irrazionali e magari anche i Numeri Immaginari, ma i Trascendenti ed ora anche i Transfiniti è troppo.
Questi matematici sono scienziati o stregoni che inventano nuove divinità ad ogni piè sospinto?
E proprio per evitare le stregonerie dei matematici tratteremo l'argomento in modo tanto elementare da apparire banale ma, almeno speriamo, anche comprensibile a tutti.

Abbiamo abbandonato il simbolismo della Logica formale, abbiamo impiegato solo termini di uso quotidiano e dove ciò non era possibile abbiamo tentato di spiegare il loro significato in modo elementare.
Purtroppo per capire di che si tratta è necessario partire dal principio, cioè da lontano.

Il primo Transfinito -Alef 0- L'infinito Numerabile - $\aleph_0$

Indovinello per gli amanti dell'enigmistica: sono di più i Numeri Pari o quelli Dispari?
< Se a fianco di un Pari vi è sempre un Dispari è ovvio che siano in ugual quantità > direbbe il buon senso comune di Pierino!
< Allora, seguendo tale principio di buon senso, è lecito affermare che se a fianco di ogni Numero Naturale vi è sempre od un Pari od un Dispari anche i Numeri Naturali sono tanti quanti i Pari ed i Dispari?>
< E no!> direbbe sempre Pierino < Poiché i Pari + i Dispari fanno i Naturali è ovvio che questi ultimi siano il doppio dei primi due!>
< Pierino, Pierino!: non ti pare che ti stia contraddicendo? Prima affermi che Pari e Dispari sono in ugual quantità poiché ad ogni Pari è possibile accoppiare un Dispari poi dici che per i Naturali tale logica di buon senso non è più valida >

Il problema di Pierino rimase praticamente irrisolto sino al 1874 quando su di una rivista di matematica nota come Giornale di Crelle apparve un rivoluzionario articolo “Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen”; autore un professore dell'Università di Halle, neanche molto noto all'epoca, di nome Georg Cantor.

Il mondo accademico dell'epoca era infatti piuttosto arrugginito di cervello; il principio aristotelico del “ una parte è sempre minore del tutto” era legge inviolabile. Quindi i Naturali e i Pari ed i Dispari non potevano essere in ugual quantità.

Per di più il grande Leopold Kronecker (Legnica 1823- Berlino 1891) sosteneva la teoria che *“ Dio fece i Numeri Naturali; tutto il resto è opera dell'uomo”* così che tutta la Matematica potesse essere essere sviluppata a partire dai Naturali.

Ma c'è di più, secondo Kronecker era fondamentale la costruibilità in un numero finito di passi di qualsiasi congettura matematica mentre Cantor, nel suo scritto, sosteneva che Naturali, Pari, Dispari, Primi, Potenze dei Naturali e Razionali fossero tutti in identica quantità senza fornirne una prova costruttiva.

A proposito di Numeri Primi ci ha pensato Euclide, ben 2500 anni fa, a dimostrare che sono anch'essi in numero infinito.

Comunque, dopo aver letto il lavoro di Cantor, si può ragionare così.:

Naturali (N)	Pari (P)	Dispari (D)	Quadrati degli N	Primi (PR)
1	2	1	1	2
2	4	3	4	3
3	6	5	9	5
4	8	7	16	7
5	10	9	25	11
6	12	11	36	13
7	14	13	49	17
8	16	15	64	19
9	18	17	81	23
10	20	19	100	29
11	22	21	121	31
12	24	23	144	37
13	26	25	169	41
14	28	27	196	43
15	30	29	225	47
16	32	31	256	53
17	34	33	289	59
18	36	35	324	61
19	38	37	361	67

Ad ogni Naturale è possibile abbinare univocamente un Pari, un Dispari, un quadrato,od un Primo; la tabella può essere proseguita indefinitamente o, se vogliamo, non appare vi sia nessuna regola e nessuna ragione logica perché ad un certo punto debba essere interrotta.

Benissimo Naturali, Pari. Dispari, Quadrati e Primi sono in uguale quantità, ma come la mettiamo con i Razionali?

I razionali sono frazioni con al numeratore ed al denominatore un numero Naturale; per costruirli (nel rispetto delle manie di Kronecker che pretendeva sempre la costruibilità) potremmo procedere come segue:

- 1° riga: al numeratore la successione dei Naturali con al denominatore il numero 1
- 2° riga: al numeratore i.c.s. con al denominatore il numero 2
- 3° riga: al numeratore i.c.s. con al denominatore il numero 3

- …..
- n° riga: al numeratore i.c.s con al denominatore il numero naturale n.

Quindi avremo al numeratore la successione dei Naturali tante volte quante sono le righe, cioè ancora la successione dei Naturali.

Conclusione i Razionali sono tanti quanti i Naturali al quadrato = (N° naturali)^{2}.

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1…….............n/1 ……..
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2…………….n/2………
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3…………….n/3………
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4…………….n/4………
1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5…………….n/5………
1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6…………….n/6……..
………………………………………………………………..					
………………………………………………………………					
1/m	2/m	3/m	4/m	5/m	6/m……………n/m……..

Pierino ragionerebbe così e concluderebbe inevitabilmente che i Razionali sono molti di più dei Naturali! Sembrerebbe piuttosto logico no?

Sbagliato!

Riprendiamo la tabella dei Razionali ed eliminiamo quelli scritti due volte, cioè le frazioni improprie che sono poi ancora numeri interi tipo 3/1 o 8/2

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1…….............. n/1………
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2…………….n/2………
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3…………….n/3………
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4…………….n/4………
1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5…………….n/5………
1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6…………….n/6……..
………………………………………………………………..					
………………………………………………………………					
1/m	2/m	3/m	4/m	5/m	6/m……………n/m………
....					

Seguendo le frecce accoppiamo ogni frazione ad un numero naturale seguendone la successione normale.

1/2↔ 1	1/3↔2	3/2↔3	2/3↔4	1/4↔4	1/5↔5	5/2↔6	4/3↔7
3/4↔8	3/4↔9	2/5↔10	1/6↔11	……...	….........	….........	…….....

…...
…...

La tabella si ferma alla sesta riga; non pare esitano impedimenti logici o regole matematiche che impediscano di proseguirla a piacimento cioè sino all'esaurimento di tutti i Naturali.

Conclusione, questa poi da attribuire al grande matematico Cauchy, anche i Razionali sono tanti quanto i Naturali, i Primi i Pari od i Dispari.

L'Insieme di tutti gli insiemi aventi potenza d'infinito uguale a quella dei Naturale assume il numero Transfinito Alef 0

Oltre ai numeri già visti vi sono altri insiemi Alef 0 ad esempio le stelle dell'Universo (supposto infinito) o tutti i pensieri "pensabili"
Tali insiemi sono definiti Numerabili visto che è possibile appiccicare una etichetta con il relativo numero Naturale ad ognuno dei loro elementi.

Il secondo Transfinito -Alef 1- L'infinito del continuo - $\aleph_1$

Qui bisogna proprio partire da lontano, lontano circa 2500 anni quando, per complicarci la vita, Pitagora ci ha messo del suo con quadrati e diagonali.

Lo sanno tutti che tra il lato di un quadrato e la sua diagonale ci passa un $\sqrt{2}$ (radice 2).
Ora, cercando di calcolare il valore di $\sqrt{2}$ si ottiene un numero che non ha fine; vale a dire che non troviamo mai una fila infinita di 0 o di 9.
Precisamente:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309..................$$

Questo è un Irrazionale perché non è possibile ottenerlo come frazione di Numeri Razionali.
Un altro Irrazionale è il rapporto tra la circonferenza ed il diametro di un cerchio, cioè π che è anche Trascendente poiché non esiste nessuna equazione algebrica di cui ne sia soluzione.

Altri Irrazionali sono: $\sqrt[3]{5}$. $\sqrt[4]{64}$. e (numero di Nepero) …........

Il bello è che fu proprio uno dei pochi amici di Georg Cantor, un altro matematico molto noto di nome Richard Dedekind a definire gli Irrazionali in termini aritmetici anziché solo geometrici.

Vediamo come ha fatto con $\sqrt{2}$: visto che non sappiamo quanto vale lavoriamo sul quadrato che vale 2 ed elenchiamo in successione tutti i numeri Razionali (leggi frazioni) il cui quadrato sia < 2.

1,9	1,99	1,999	1,9999	1,99999	.... <2
19/10	199/100	1999/1000	19999/10000	199999/1000000	…......... <2

la radice quadrata di questa successione porta a:
1,3784 1,41067 1,41385 1,414178 1,4142 100 …..............$\sqrt{2}$
che rappresenta con ottima approssimazione in difetto $\sqrt{2}$.
Analogamente per i Razionali aventi quadrato > 2

2 < …......... ….........	2,1	2,11	2,111	2,1111	2,11111
2 < …..........................	21/10	211/100	2111/1000	21111/10000	211111/100000

la cui radice quadrata porta a :

$\sqrt{2}$ < …........................1,4491 1,4525 1,4529 1,45296 1,452997

Le due successioni, una sempre maggiore ed una sempre minore di $\sqrt{2}$, convergono proprio in $\sqrt{2}$; questa operazione è nota come Taglio di Dedekind

Ora non manca che di vedere se la quantità di tutti gli Irrazionali sia maggiore, minore od uguale di quelle dei Naturali o dei Razionali.
Iniziamo con un'altra complicazione dei matematici che, a scanso di essere tacciati di scarsa fantasia hanno inventato i Reali; i Reali non sono altro che i Naturali + i Razionali, + gli Irrazionali.

Considerazione un poco stupida: se scriviamo un numero a caso in forma decimale siamo sicuri che o è un Naturale od è un Razionale oppure un Irrazionale e quindi è sicuramente un Reale.

Ora la tabella seguente dove la prima colonna riporta tutti i Naturali mentre le righe contengono Numeri Reali scelti del tutto casualmente in forma decimale, è in grado di dimostrare che anche gli Irrazionali sono , in qualche modo, infiniti: infatti sono accoppiati biunivocamente alla successione infinita dei Naturali.

1°	1, 6 6 6 6 6 6 6 6…………
2°	1, 0 4 7 1 9 7 5 5 1…………
3°	1, 2 0 0 0 0 0 0 0 0…………
4°	1, 4 1 4 2 1 3 5 6 2…………
5°	1, 7 3 2 0 5 0 8 0 8 …………
6°	1, 1 2 5 0 0 0 0 0 0 …………
7°	1, 5 7 0 7 9 6 3 2 7 …………
	………………………………………………..
n°	………………………………………..
………………………………………………..	

Ora consideriamo le cifre segnate dalla freccia (tipo 6,4,0,2,5,0,3,......)e togliamo uno a ciascuna di esse, costruendo così il Numero Reale che segue:

1, (6-1) (4-1) (0-1) (2-1) (5-1) (0-1) (3-1) …
1, 5 3 1 1 4 1 2……

(si trascura il segno negativo derivante da 0-1)

Questo numero rimane escluso dalla possibilità di essere "numerato"; esso cioè non è sicuramente compreso nella tabella.

Infatti 1,5311412..........è :

diverso dal numero della prima riga perché ha la prima cifra decimale diversa
diverso dal numero della seconda riga perché ha la seconda cifra decimale diversa
diverso dal numero della terza riga perché ha la terza cifra decimale diversa
………………………………………………………………………………………

Ora, in forza del principio di corrispondenza biunivoca, se le righe della tabellina avevano esaurito tutti i Numeri Naturali cui erano accoppiate e il numero 1,5311412 non è compreso nella tabellina si deduce inevitabilmente che la tabellina con aggiunto 1,5311412……….. costituisce un Insieme più numeroso dei Numeri Naturali, cioè un Insieme di cardinalità maggiore di Alef 0.

Perdon! Cardinalità non è altro che la posizione dei vari Alef nella loro successione ordinata (Alef 0, Alef 1, Alef 2 ecc.)

Ottimo! Abbiamo provato che l'insieme dei Numeri Reali ha una quantità di elementi cioè una potenza (altra invenzione semantica) maggiore di quella del Numerabile; esso corrisponde alla potenza del Continuo ed ha come numero Transfinito Alef 1.

Per parlare di Continuum è opportuno fare riferimento a Richard Dedekind che, alla età di ventiquattro anni, invece di andarsene in discoteca o ad allenarsi a pallanuoto, scrisse un libro dal titolo " Continuità e Numeri Irrazionali".

Il suo ragionamento fu pressappoco il seguente: il Continuo geometrico ipotizza che tra due punti qualsiasi di un segmento, anche estremamente vicini, ci possono stare altri infiniti punti.

Ma c'è di più; il Continuo geometrico ipotizza anche che non ci possano essere "buchi". Ciò significa che non ci può essere alcuno spazio sul segmento, che non sia occupato da un punto.

Ora, tra due Razionali, anche estremamente vicini, si è visto che ci possono stare altri infiniti Razionali, ma, con i Razionali, si sono "tappati" proprio tutti i " buchi"?

Naturalmente no, visto che tra due successioni di Razionali, una crescente ed una decrescente, ci può stare un Irrazionale.

Conclusione: il Continuo geometrico è Isomorfo (cioè è un insieme i cui elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con gli elementi di un altro Insieme) con l'insieme dei Numeri Reali

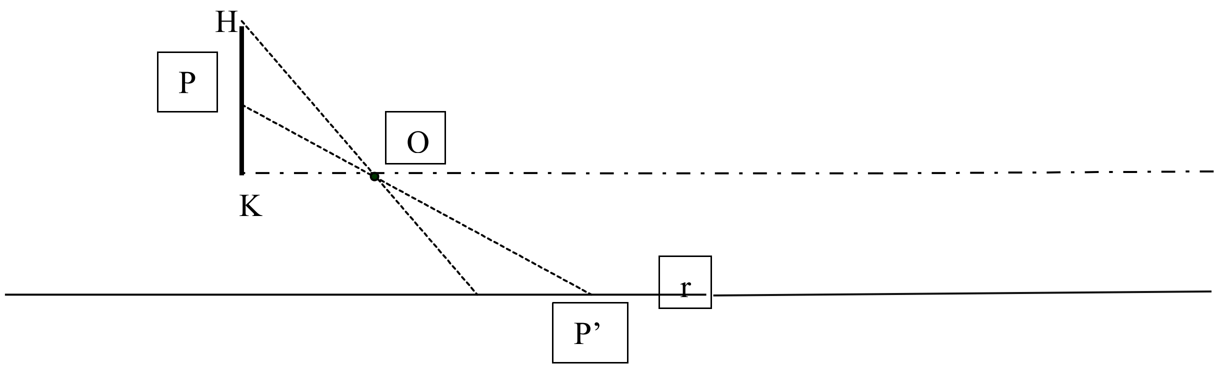
Conclusione: i punti di un segmento lungo un metro sono Alef 1 a conferma del fatto che

Alef 1 = $\aleph_1$ = Insieme dei Numeri Reali e del Continuo geometrico

Ed è proprio per tale ragione che la "potenza" (cioè il numero degli elementi) di tutti gli Insiemi isomorfi con quello dei Numeri Reali è definita " potenza del Continuo"

Ma qui viene il bello! Anche una semiretta, ovviamente infinita, contiene tanti punti quanti un segmento di un metro.

Ma va!? Direbbe Pierino
Eppure è proprio così



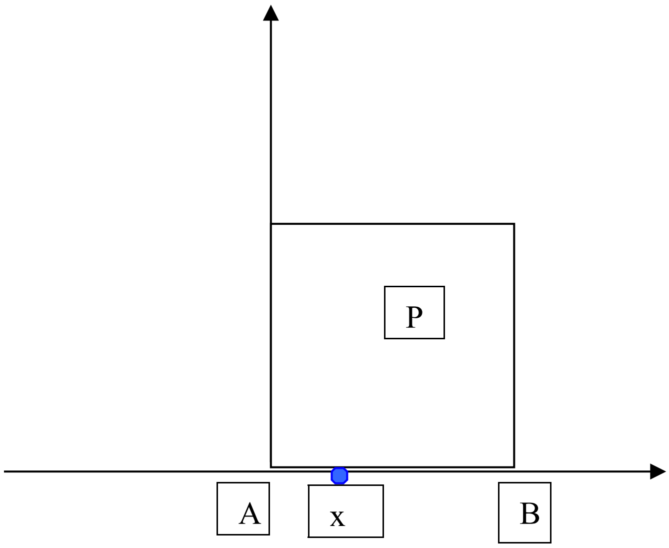
Ogni punto P del segmento KH può venire proiettato sulla retta r nel punto P' dal punto O. Il segmento HK può anche avere punti i cui corrispondenti su r siano all'infinito (ad esempio il punto

K)

.Quindi ad ogni punto P corrisponde biunivocamente un punto P’; tanti sono i punti di HK quanti quelli della semiretta r.; tutto ciò nonostante il segmento HK abbia lunghezza finita mentre la semiretta r sia infinita

Ma c’è di più! Anche un quadrato di lato un metro contiene tanti punti quanti un segmento, sempre di un metro!

Questo è proprio incredibile; tanto incredibile che quando Cantor lo scoprì scrisse al suo amico Richard Dedekind: < lo vedo ma non ci posso credere >



Poniamo che il quadrato di figura abbia lato di lunghezza unitaria; il punto x sul suo lato orizzontale abbia coordinata 0,abcdefgh……

E’ allora possibile individuare il punto P, all’interno del quadrato, avente coordinate:

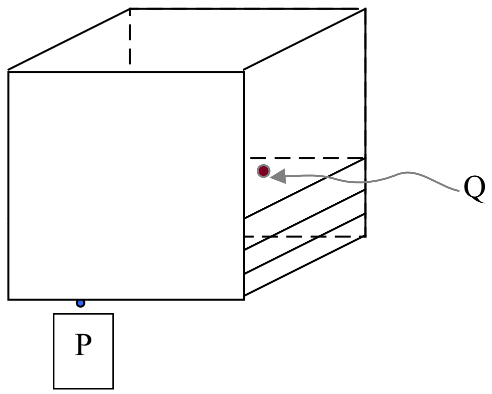
$x_P = 0$, le cifre di posizione pari di x (nel nostro caso bdfh…......... ottenendo 0, bdfh.........)
$y_P = 0$, le cifre di posizione dispari di x (nel nostro caso aceg…....... ottenendo 0, aceg........)

E’ allora evidente che ad ogni punto x del segmento unitario AB, corrisponde biunivocamente un punto ed un solo punto P del quadrato.

La cosa ancora più sconvolgente è che anche un cubo contiene tanti punti quanto un suo lato; insomma un cubo, per esempio di dimensioni 1x1x1, contiene tanti punti quanto un segmento lungo 1.

Inverosimile, vero?

Tanto più che, a sensazione, un cubo è fatto da infiniti piani uno sopra l’altro, ognuno dei quali e fatto da infiniti segmenti, uno accostato all’altro.



Anche in questo caso la dimostrazione è semplice: preso un punto P sul segmento unitario che abbia coordinata: x = 0, 359806589140261 (dove le cifre che seguono lo zero sono del tutto casuali) si individui un punto Q che abbia:

coordinata x = 0, 38512….. cioè la

I, la IV, la VII, la X cifra e così via

coordinata y = 0,508646…. cioè la

II, la V, la VIII, la Xi cifra e così via

coordinata z = 0,96901…….cioè la

III, la VI, la IX cifra e così via

E' allora evidente che ad ogni punto P del lato unitario del cubo, corrisponde un punto Q, ed uno solo, del suo volume e viceversa.

Questa scoperta di Cantor risultò sconvolgente per il pensiero matematico ottocentesco!

Vi era la ferma convinzione che il numero di coordinate necessarie per individuare un punto di uno spazio, corrispondesse alle dimensioni di quello spazio.

Vediamo di spiegarci!
Su di una retta, che ha una sola dimensione, la lunghezza, è sufficiente un solo numero per individuare un punto: la distanza dall'origine.

Su di un piano bidimensionale (larghezza e lunghezza) sono necessarie due coordinate, quindi due numeri: la x e la y, così come in un cubo sono richieste tre coordinate (x,y,z).

Ora, se i punti di una retta, di un piano e dello spazio sono tanti uguali, come si spiega che non basti sempre un solo numero, come per la retta, ad individuare un punto?
Questo tipo di ragionamento può andare bene in spazi finiti; all'infinito è tutta un'altra storia!

Sicuramente esistono altri insiemi con la potenza del Continuo; ad esempio gli istanti del Tempo dato che tra due istanti, prossimi sinché si vuole, ce ne stanno infiniti altri, senza che rimanga alcun "vuoto"

Asserire che retta piano e spazio hanno la stessa potenza del continuo, contengono cioè lo stesso numero di punti, equivale a dire che:

$$\aleph_1 = \aleph_1^2 = \aleph_1^3$$

cioè che il quadrato ed il cubo dell'Insieme dei Numeri Reali hanno tutti la stessa quantità di elementi; ecco perché spazi di dimensioni diverse possono contenere la stessa quantità di punti.

Poiché è altamente probabile che tutti conoscano il paradosso di Zenone noto come "Achille e la Tartaruga"non lo riportiamo ma cogliamo l'occasione per fornirne una adeguata spiegazione:

Zenone aveva bellamente voluto "numerare" il percorso tra lo start ed il traguardo; nel I tratto Achille ha fatto questo, nel II tratto Achille ha fatto quest'altro, eccetera.

Ma le distanze hanno la potenza del Continuo, cioè Alef 1 e non sono Numerabili (Alef 0) ; due infiniti di diversa cardinalità non si posso comparare così facilmente!

L'anno 1900 fu veramente fondamentale per la storia della Matematica; proprio all'inizio di quell'anno si tenne, a Parigi, un famoso Congresso Internazionale di Matematica dove David Hilbert enunciò quelle che avrebbero dovuto essere le linee guida per la ricerca del secolo che iniziava.

A tale proposito e riferendoci alla questione dell'Infinito cantoriano, vale la pena di riportare integralmente le parole di David Hilbert, il più grande matematico e logico moderno:

" Due sistemi, per esempio due insiemi di Numeri Reali o di Punti, sono detti (in accordo con Cantor) equivalenti o di ugual Numero Cardinale, se possono essere messi in relazione uno ad uno in modo che a ciascun numero di un insieme corrisponda uno ed un solo definito numero dell'altro insieme.
Le ricerche di Cantor su tali insiemi di punti, suggeriscono un teorema altamente plausibile che tuttavia, nonostante strenui sforzi, nessuno è ancora riuscito a dimostrare.
Questo è il Teorema: **ciascun insieme definito di Numeri Reali o di Punti è o equivalente all'insieme dei Numeri Naturali 1,2,3,…. O all'insieme di tutti i Numeri Reali e, quindi, al Continuo, cioè ai punti di una retta; relativamente alla equivalenza ci sono, cioè, solo due insiemi di numeri. Il Numerabile ed il Continuo.**
Da questo teorema ne deriva, a sua volta, che il Continuo è il Numero Cardinale successivo rispetto al Numerabile; la dimostrazione di questo Teorema sarebbe, quindi, un ponte tra il Numerabile ed il Continuo.
Lasciatemi citare un'altra veramente interessante ipotesi di Cantor che sta in stretta connessione con il summenzionato teorema e che, forse, offre la via per la sua dimostrazione
Ogni insieme di Numeri Reali è detto "ben ordinato" se per ogni coppia di numeri dell'insieme è determinabile chi è il precedente e chi è il successivo e se, nello stesso tempo, tale criterio è tale che se A è precedente B e B è precedente C, A viene sempre prima di C.
La successione naturale dei numeri di un insieme è definita come quella in cui il più piccolo precede il più grande..
Ma ci sono, come è facile vedere, una infinità di altre vie per cui un insieme di numeri può essere ordinato (ad esempio prima tutti i pari e poi i dispari, oppure prima i Numeri Primi e poi i restanti, ecc. ecc.)
Se pensiamo ad una disposizione definita di numeri e selezioniamo da essa un insieme particolare di numeri, che chiamiamo disposizione o sottoinsieme parziale, questo potrà, anch'esso, essere ordinato.
Ora Cantor considera un particolare tipo di insieme ordinato che egli chiama " Ben Ordinato" e che è caratterizzato in questo modo cioè che non solo esso stesso ma anche ogni suo sottoinsieme parziale siano tali per cui esiste un Primo Elemento.
L'insieme dei Numeri Naturali, nel loro ordine naturale, è evidente che sia un insieme "Ben Ordinato".
D'altra parte l'insieme dei Numeri Reali, cioè il continuo, è evidentemente NON Ben Ordinato.
Se pensiamo ai punti di un segmento di retta, con il suo punto iniziale escluso, come nostro sottoinsieme parziale, questo non avrà un Primo Elemento.
Sorge ora una questione: se la totalità dei numeri (reali) possa essere ordinata in altro modo così che ogni sottoinsieme parziale possa avere un primo elemento, cioè se il Continuo possa essere considerato come Insieme Ben Ordinato, questione che Cantor pensa possa ricevere risposta affermativa.

Appare assai desiderabile ottenere una dimostrazione di tale ipotesi di Cantor, probabilmente indicando realmente un ordinamento di numeri tale che in ogni suo sottoinsieme parziale possa venire identificato il primo elemento.

Prima si affrontare Alef 2 è forse opportuno chiederci se sono stati esauriti tutti gli insiemi di Alef1: Naturali, Razionali, Irrazionali e poi basta?
Ci sarebbero anche gli Immaginari e una loro combinazione con i Reali, cioè i Complessi.

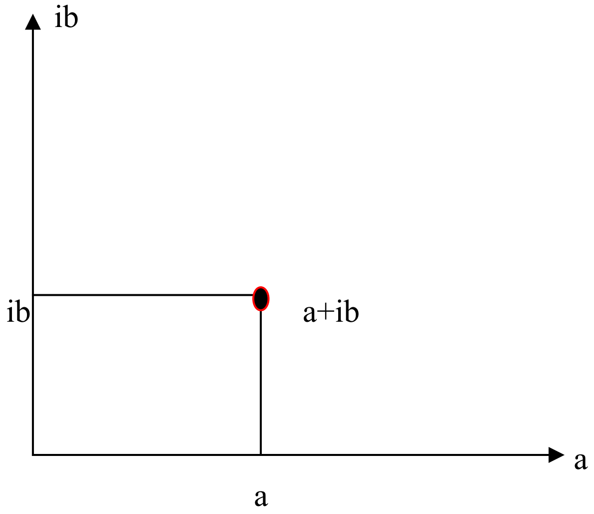
$\sqrt{-1}$ non potrebbe esistere visto che (-1).(-1) fa + 1 ed allora i matematici si sono inventati i Numeri Immaginari ed hanno definito:

$$i = \sqrt{-1}$$

I Complessi, nella forma a+ib non sono altro che una coppia di Numeri Reali (a e b) tenuti assieme da quello strano i.

Ci si potrebbe allora chiedere: se in un numero complesso del tipo a + ib (i stà per $\sqrt{-1}$) “a” è uno qualsiasi degli infiniti Reali e “b” altrettanto, la loro combinazione non comporta un numero di coppie maggiore di Alef 1, cioè dell’insieme dei soli Reali.

Proviamo allora a rappresentarli in un piano cartesiano dove, sulle ascisse portiamo i valori di “a” e sulle ordinate quelli di “ib”



E’ allora evidente che facendo assumere ad “a” tutti i valori dell’insieme dei Reali e a “ b” altrettanto, si viene a ricoprire l’area dell’intero quadrante compreso tra ascissa ed ordinata.
Ma una superficie ha potenza d’infinito pari ad Alef 1, come è stato dimostrato.

E allora : Njumeri Naturali, Numeri Reali, Numeri Complessi, Spazio e Tempo o appartengono all’infinito di Alef 0 od a quello di Alef 1.
Che altro ci può essere di più “potente”?

Il terzo Transfinito -Alef 2- Oltre il Continuo - $\aleph_2$

Riassumendo quanto fino ad ora visto abbiamo:
Alef0 = Primo Numero Transfinito – Insiemi Numerabili
Alef1 = Secondo Numero Transfinito - Insiemi del Continuo
Sorge allora una ovvia domanda: si può continuare con il giochetto degli Alef?

Consideriamo l’Insieme delle seguenti 4 lettere dell’alfabeto:

I = (a,b,c,d)

e costruiamo tutti i sottoinsiemi di I.

Poiché un Sottoinsieme non è altro che un pezzetto, cioè una parte, dell'insieme di partenza appare ovvio che ne abbia una cardinalità inferiore (anche sulla base del già visto “una parte è sempre minore del tutto” di aristotelica memoria) ; unica particolarità: si considera Sottoinsieme anche quello Improprio, corrispondente all’Insieme iniziale ed a quello Vuoto, cioè lo zero ∅.

Ed ecco, in pratica l’Insieme M, costituito da tutti i Sottoinsiemi di I.

M = ∅, abcd, a,b,c,d,ab,ac,ad,bc,bd,cd,abc,abd,acd,bcd

Quanti sono gli elementi di M?

Basta contarli e verificare che sono $2^4 = 16$, cioè 2 elevato al numero di elementi di I, cioè 4.

In tutto ciò non vi proprio nulla di strano, come insegna il Calcolo Combinatorio.

Quello che è importante è che 2^4 è maggiore di 4 e quindi M ha potenza maggiore di I; vale a dire che tutti i sottoinsiemi dell'insieme dato ha cardinalità maggiore del primo.

Ma la grande stranezza è che anche se I è un Insieme infinito, M ha una potenza d’infinito maggiore di I!
Cantor è riuscito a dimostrare anche questo! Vediamo come:

Iniziamo considerando dapprima l' insieme finito del tipo I = (a,b,c,d) ed il suo Sottoinsieme già visto M = ∅, abcd, a,b,c,d,ab,ac,ad,bc,bd,cd,abc,abd,acd,bcd
e poniamo in corrispondenza biunivoca gli elementi di I con altrettanti elementi del suo sottoinsieme scelti a caso :

I		M
a	⇔	ac
b	⇔	cd
c	⇔	abd
d	⇔	bd

Si nota facilmente una particolarità; alcuni elementi di I sono in corrispondenza con elementi di M che li contengono.

Questo è, per esempio, il caso di a (di I) che compare anche in ac (di M) o il caso di d (di I) che compare anche in bd (di M)

Altri elementi di I, al contrario, sono accoppiati ad elementi di M che non li contengono; per esempio b (di I) che non compare in cd (di M) o c (di I) che non compare in abd (di M).

Tutto ciò vale anche per insiemi infiniti.

Costruiamo, allora, l’Insieme N utilizzando gli elementi di I accoppiati ad elementi di M dove non compaiono le stesse lettere; nel nostro esempio finito:

$N = (bc)$

Il bello è che si può dimostrare che N, cioè (bc) non può essere accoppiato a nessuno degli elementi di I..

Bella forza, si obietterà! Basta guardare la tabellina degli accoppiamenti:

$a \Leftrightarrow ac$
$b \Leftrightarrow cd$
$c \Leftrightarrow abd$
$d \Leftrightarrow bd$

Verissimo! Ma se I avesse 100.000 elementi? E se ne avesse infiniti?

Cantor riuscì ad inventare una dimostrazione valida anche per Insiemi infiniti.

N, cioè (bc) non può essere accoppiato con (a) dato che (a) è accoppiato con elementi di M dove compare (a)(e in (bc) a non c'è)

N, cioè (bc) non può essere accoppiato con (b), dato che (b)è accoppiato solo con elementi di M dove (b) non compare (e in (bc) c'è b)

N, cioè (bc) non può essere accoppiato con (c) per la medesima ragione vista per (b)

N non può essere accoppiato con (d) per la stessa ragione già vista per (a)

Conclusione, se esiste un elemento di M che non può essere accoppiato con nessun elemento di I, vuole dire che M ha almeno un elemento in più di I, ovvero M ha cardinalità maggiore di I.

Se I ha cardinalità Alef 1 ne deriva che M ha cardinalità maggiore, che, per definizione, assumerà il nome di Alef 2 = $\aleph_2$

Ovviamente è facile, con la stessa tecnica, costruire Alef 3 e poi Alef 4, Alef 5, Alef 6, eccetera .

Magnifico!Ecco una serie infinita di Infiniti, uno maggiore del precedente!

Sì, magnifico, ma c'è un problema: Cantor ha introdotto una ipotesi, quella di poter scegliere per fare gli opportuni accoppiamenti, anche all'infinito.

Infatti, ritornando all'esempio di I ed M, ha ipotizzato di poter accoppiare gli elementi di I con quelli di M, scegliendo come seguire tale operazione in base alla presenza o meno della stessa lettera; ora, se I fosse infinito, tale operazione non è detto sia possibile.

L'ipotesi introdotta è nota proprio come IS (Ipotesi della Scelta); se si accetta l'ipotesi di poter scegliere anche all'infinito, allora la serie di Numeri Cardinali Transfiniti, da Alef 0 ad Alef N è, anch'essa, una serie infinita.

IS è una ipotesi valida nel caso di Insiemi ben Ordinati (da Assioma della scelta diviene allora Teorema della Scelta)..

Ma ora vi è un altro problema da affrontare: tra $\aleph_0$ ed $\aleph_1$ siamo sicuri che non vi sia nulla; che so un $\aleph_{0,5}$?

In realtà abbiamo visto come tra due Numeri Naturali vi stiano infiniti Razionali, come tra due Razionali vi stiano infiniti Irrazionali; tra due Irrazionali non potrebbe starci qualcosa d’altro?

Cantor riteneva di aver dimostrato che tra $\aleph_0$ ed $\aleph_1$ non vi fossero altri Insiemi infiniti; purtroppo la sua dimostrazione ammetteva implicitamente un'altra ipotesi, cioè che gli insiemi considerati fossero “ ben ordinati”.

Quindi la dimostrazione non era valida: quella di Cantor era solo una ipotesi, l’Ipotesi del Continuo .

Ipotesi del Continuo = IdC = tra $\aleph_0$ ed $\aleph_1$ non vi sono altri Insiemi infiniti

Ipotesi generale del Continuo = IGdC = tra $\aleph_n$ ed $\aleph_{n+1}$ non vi sono altri Insiemi infiniti

I Numeri Cardinali Transfiniti, da $\aleph_0$ a $\aleph_n$ sono stati costruiti utilizzando i Numeri Cardinali, cioè i Naturali, i Razionali e gli Irrazionali.

Anche $\aleph_2$ è stato costruito come Insieme di tutti i Sottoinsiemi di $\aleph_1$, quindi impiegando i Numeri Reali (anch'essi Cardinali), cioè costituenti una successione ove la posizione è stabilita dal criterio “maggiore” , “minore”. La posizione del naturale 5 è definita dall'essere >4 e < di 6, ossia:

$$4 < 5 < 6$$

I Numeri Cardinali costituiscono Insiemi ben Ordinati ossia la loro successione è stabilita dal criterio > di e > di.

I Numeri Transfiniti Ordinali

Consideriamo la solita serie dei Numeri Naturali:

N=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15…………

ed esaminiamo la loro posizione nella sucessione, anziché il loro valore .

Il simbolo 8, per esempio, visto come due cerchietti sovrapposti senza altro significato, viene dopo il simbolo 7 e prima del simbolo 9.

Si sarebbero potute utilizzare le lettere dell’alfabeto, anziché i numeri, con il problema che esse sono in numero finito, mentre serve una serie infinita di simboli.

Il tipo d’ordine abituale, nel caso dei Numeri Naturali, è quello di Maggiore/Minore; la posizione del numero 5 è quella di essere compreso tra il 6 ed il 4, perché 5 è minore di 6 e maggiore di 4.

Ma si possono pensare infiniti altri tipi di ordine; per esempio:

1,3,5,7,9,11,13…………..2,4,6,8,10,12,14…………..

dove vengono prima i numeri dispari, nel loro ordine consueto, e poi i pari.

Oppure ancora:

4,6,8,9,10,12,14,15,16………..1,2,3,5,7,11,13,17,19,23…

dove ci sono prima i Numeri Naturali non Primi, nel loro ordine consueto, e poi i Numeri Primi

Ritornando, quindi, alla sequenza dei Numeri Naturali:

$$N = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,\ldots\ldots\ldots\aleph_0$$

si definisce l'ordine con cui sono posti i simboli da 0 a $\aleph_0$ come numero d'ordine ω_0

$\boldsymbol{\omega_0}$ = primo numero Ordinale Transfinito

Ora una operazione decisamente banale: poniamo il numero 9 al porto del 3 e viceversa:

$$M = 0,1,2,\mathbf{9},4,5,6,7,8,\mathbf{3},10,11,12\ldots\ldots\ldots\ldots\aleph_0$$

Che tipo d'ordine ha M? Ovviamente ancora ω_0 dato che è ancora possibile un accoppiamento con la successione Ben Ordinata dei Naturali; identica situazione spostando il numero 9 dopo $\aleph_0$ ma se si spostano dopo $\aleph_0$ tutti i Numeri Pari, si otterrà $\omega_0+\omega_0 = 2\omega_0$

Rimarrebbero, infatti, prima di $\aleph_0$ tutti e solo i Numeri Dispari che, lo si è ben visto, sono $\aleph_0$ mentre dopo $\aleph_0$ comparirebbero tutti i Pari che sono, anch'essi, $\aleph_0$. Se poi nel corso di tali spostamenti non si è cambiata la posizione dei numeri, si avrà proprio $\omega_0+\omega_0 = 2\omega_0$.
In altri termini si avrà:

$0,3,5,7,9,11,13,15,17\ldots...\aleph_0, 2,4,6,8,10,12,14,16\ldots\ldots\aleph_0.$

e poiché sia la prima parte della successione che la seconda mantengono l'ordine di maggiore/minore e sono correlabili alla successione dei Naturali, avranno,entrambe Numero d'ordine ω_0 quindi è corretta la $2\omega_0$

A questo punto vale la pena di riportare integralmente un passo dello scritto di Bertrand Russel "Introduzione alla filosofia matematica", scritto nel 1918, durante un periodo di carcerazione di sei mesi, inflittogli per una serie di articoli pacifisti.

Possiamo procedere all'infinito nel processo di assottigliamento dei Numeri Naturali. Per esempio potremmo porre prima i Numeri Dispari, quindi il doppio di ciascuno di essi, poi il doppio ancora di questi e così via. Otterremmo così la serie:

$1,3,5,7\ldots\ldots\ldots\ldots2,6,10,14,\ldots\ldots\ldots\ldots..4,12,20,28,\ldots\ldots\ldots\ldots8,24,40,56,\ldots\ldots\ldots\ldots$

il cui Numero d'Ordine è ω^2 poiché si tratta di una progressione di progressioni.
Ciascuna delle progressioni di questa nuova serie può essere assottigliata proprio come avevamo assottigliato la progressione originale; possiamo passare così a:

$$\omega^3;\omega^4;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\ \omega^\omega\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Conclusione

I Numeri Transfiniti costituiscono una successione infinita ben ordinata ovvero esistono infiniti "tipi" d' infinito ordinati secondo la loro cardinalità oppure secondo l'ordine con cui sono disposti. Tuttavia, sotto il profilo strettamente ontologico, appare chiaro che vi siano almeno due categorie d'infinito.
Un infinito irraggiungibile se non come induzione, cioè un Infinito Potenziale, quello impiegato in

Analisi Matematica, inventato ancora nella seconda metà del 600 da Isaac Newton e da Gottfried Lebnitz
Un Infinito Attuale quello di Cantor , inteso come esistente di fatto sebbene non raggiungibile fisicamente.