Le geometrie non euclidee

dr.ing. Alberto Sacchi
Sviluppo Progetti Avanzati srl- R&D Dept.
ing.sacchi@alice.it

NOTA

Esistono numerose opere, sia rigorosamente scientifiche che largamente divulgative, concernenti le Geometrie non-euclidee; il presente scritto si pone l'obiettivo di illustrarle da un punto di vista strettamente euclideo ovvero secondo la percezione umana innata e naturale. Ed è in tale ottica che sia la Geometria Iperbolica che quella Ellittica verranno presentate mediante modelli, evidenziando di volta in volta le identità e gli scostamenti rispetto ai Postulati euclidei.
Vengono totalmente omesse le dimostrazioni rigorose dei Teoremi citati i cui risultati sono illustrati in modo intuitivo mediante modelli e figure grafiche

INTRODUZIONE

Il concetto geometrico di Punto, Retta e Piano è considerato da Euclide (Elementi 300.a.C. - Cap.1 - Libro I) come "Primitivo" , ovvero innato e non richiedente ulteriori definizioni.
In particolare, al punto è riservata la prima delle definizioni del I libro, dove si definisce il punto come *ciò che non ha parti* ed è l'ente fondamentale della Geometria; linea è un ente *dotato di sola lunghezza* (def.2 Cap I), piano *ha solo lunghezza e larghezza* (def.5 Cap 1) Tali definizioni sono di tipo *ostensivo* cioè non hanno valenza logica, ma solo descrittiva .

Per Immanuel Kant Punto, Retta e Piano sono concetti sintetici a priori, quindi universali ed innati. La definizione di retta quale prolungamento all'infinito della geodetica tra due punti (percorso più breve tra di essi) rende il concetto sintetico, in quanto "brevità" di un percorso è qualità osservazionale ed intrinsecamente collegata con quello di retta.

David Hilbert nel trattato Grundlagen der Geometrie (*Fondamenti della geometria*) (1899) lascia indefiniti i concetti di Punto, Retta e Piano in quanto concetti primitivi e, pertanto, non ulteriormente definibili.

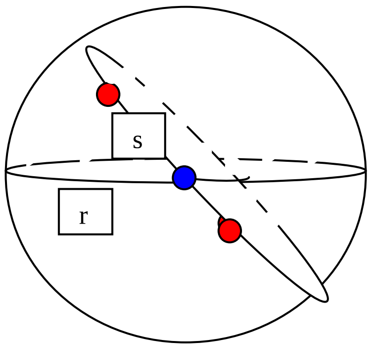
Appare allora possibile concepire, per Punto Retta e Piano (in ordine alla indefinibilità degli stessi), altri enti geometrici non euclidei; in altri termini una entità intelligente non umana potrebbe avere un concetto primitivo esotico per tali enti assolutamente divergente da quello euclideo.

La Definizione 23 degli Elementi recita: *Diconsi parallele rette giacenti nello stesso piano che, prolungate illimitatamente in entrambe le direzioni, non presentano alcun punto in comune.*

Se il piano fosse inteso come "la superficie su cui giacciono gli enti geometrici", nel caso particolare che si trattasse di una superficie sferica, la Definizione 23 di Euclide porterebbe alla situazione (paradossale per la geometria euclidea) illustrata da FIG 1.

Più in generale, Punto risulterebbe un punto della superficie sferica, Retta il prolungamento illimitato della geodetica tra due punti (conseguentemente risulterebbe essere un cerchio massimo), Piano la superficie sferica.

Già questo configura un abbozzo incompleto e grezzo di Geometria ellittica, ma non è stata quella illustrata la via seguita storicamente per la nascita delle geometrie non euclidee.



Dati i punti P e Q ( ) la geodetica tra di essi è l'arco di circonferenza massima s che, prolungata illimitatamente, genera la circonferenza s.

La retta (circonferenza) s e la retta (circonferenza) r non possono mai essere parallele avendo sempre almeno un punto in comune all'interno del piano.

Il V Postulato di Euclide non è così rispettato

FIG.1

CENNI STORICI

Il Primo libro degli Elementi di Euclide contiene:
23 Definizioni:

- def1 – definizione di punto
- def2 – definizione di retta
- def5- definizione di piano
- def8 – definizione di angolo
- def10- definizione di perpendicolare
- def15- definizione di cerchio
- def17- definizione di diametro
- def20- definizione di triangolo
- def22- definizione di quadrato
- def23- definizione di parallele

5 Assiomi

- Per un punto passano infinite rette
- Per due punti distinti passa una ed una sola retta
- Per una retta nello spazio passano infiniti piani
- Per tre punti non allineati nello spazio passa un solo piano
- Per tre punti allineati passa una e una sola retta

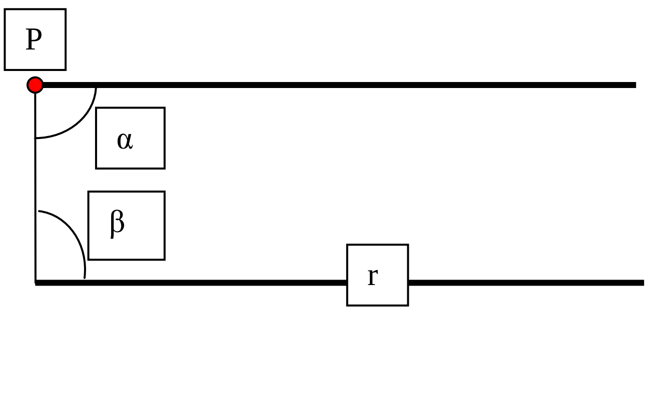
5 Postulati

- I Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta
- II Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente
- III Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio
- IV Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro
- V Se una retta che taglia altre due rette determina dallo stesso lato di ciascuna retta angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

La versione moderna, dovuta a Hilbert, del V Postulato, recita: *da un punto complanare ad una retta è possibile tracciare una ed una sola parallela alla retta data giacente sul medesimo piano.*
Essa è logicamente ed esattamente equivalente alla versione euclidea.
La differenza tra Assiomi e Postulati è stata evidenziata già da Aristotele; gli Assiomi sono verità autoevidenti valide per qualsiasi disciplina scientifica mentre i Postulati, se pur richiedendo anch'essi l'autoevidenza, sono veri in un ben preciso campo del sapere (la Geometria nel caso di Euclide)

Appare immediatamente evidente la differenza interpretativa e la maggior complessità logica tra i primi quattro ed il V Postulato, detto delle parallele.
Poiché la definizione stessa di postulato richiede l'autoevidenza, il V si presenta di dubbia validità tant'è che lo stesso Euclide dimostra ben 28 teoremi prima di farvi riferimento.

Tra tali teoremi dimostrati senza il contributo del V Postulato (prop. 17 degli Elementi) vi è quello che recita: *la somma di due angoli di un triangolo è sempre minore di due angoli retti.*
Proclo (411-485 d.C.) osserva che tale teorema è esattamente l'inverso del V Postulato e non appare logico che l'inverso di un teorema debba essere un Postulato. Ne conclude quindi che il V postulato debba risultare dimostrabile nell'ambito degli altri 4.

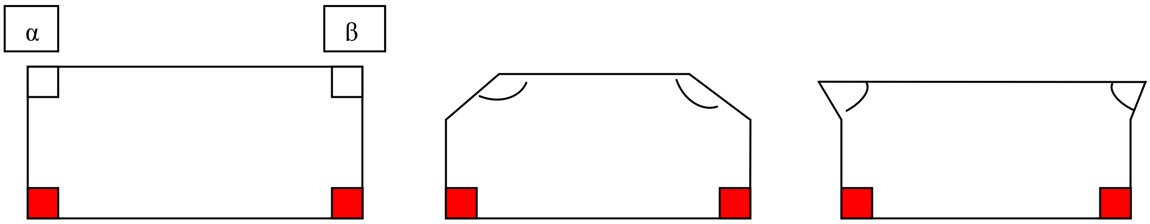


Se $\alpha + \beta = 2$ retti, l'angolo all'infinito ove si incontrano le due rette formando un triangolo, deve essere nullo.
Ciò equivale ad asserire che le due rette sono parallele.
Ne consegue che dal punto P è possibile tracciare una parallela alla retta r.
L'esistenza di una parallela è garantita dalla proposizione XXXI degli elementi mentre per l'unicità è necessario ricorrere al V Postulato.

FIG.2

Tra la folta schiera di matematici che, nel corso di oltre mille anni, tentarono una dimostrazione del V Postulato, spicca la figura e l’opera di Girolamo Saccheri.
Girolamo Saccheri (Sanremo 1667 – Milano 1733) frate gesuita, docente di matematica a Pavia, fu il primo matematico a tentare una dimostrazione rigorosa del V Postulato.(1733 *Euclides ab omni naevo vindicatus)*

Tale dimostrazione parte dal un quadrilatero birettangolo isoscele (FIG.3) con gli angoli alla base retti ed analizza la struttura della figura nella ipotesi dei restanti angoli ottusi, retti od acuti.



Caso angolo retto | Caso angolo ottuso | Caso angolo acuto

I tre casi illustrati prefigurano ed anticipano la Geometria ellittica:
euclidea | ellittica | ellittica

FIG 3

Con qualche riferimento all’opera di Proclo ed alla proposizione 17 degli Elementi, Saccheri dimostra facilmente che il caso “ angolo ottuso” equivale a quello” angolo retto” e, pertanto *“ L’ipotesi dell’angolo ottuso è completamente falsa perché distrugge se stessa”*
In altri termini l’ipotesi dell’angolo ottuso comporta l’accettazione del V postulato così come l’ipotesi dell’angolo retto e pertanto annulla il presupposto che l’angolo sia ottuso (distrugge se stesso)
Il caso “angolo acuto” si dimostra più complesso ed ostico al punto che Saccheri si trova costretto ad abbandonare il rigore logico ammettendo che esso contrasta con l’idea stessa di retta *“ L’ipotesi dell’angolo acuto è assolutamente falsa, perché ripugna alla natura della linea retta”.*

Passano esattamente 99 anni dalla pubblicazione postuma del *Euclides ab omni naevo vindicatus* di Saccheri prima che si verifichi un nuovo tentativo concreto di dimostrazione del V postulato di Euclide.

Farkas Wolfgang Bolay, matematico ungherese noto per i suoi lavori sui fondamenti della geometria, il 3 novembre 1832 riceve una lettera dal figlio Janos: “*Sono ormai risoluto a pubblicare un'opera sulla teoria delle parallele, appena avrò ordinato la materia e le* *circostanze me lo permetteranno. Non l'ho ancora fatto, ma la via che ho seguito ha certamente, per così dire, quasi raggiunto lo scopo; lo scopo proprio non è raggiunto, ma ho scoperto cose così belle che ne sono rimasto abbagliato, e si dovrebbe sempre rimpiangere se andassero perdute. Quando le vedrete, lo riconoscerete voi pure. Nell'attesa non vi posso dire altro che questo: ho creato dal nulla un nuovo universo. Tutto ciò che vi ho comunicato fino ad ora non è che un edificio di carta di fronte a questa torre. Sono tanto persuaso che questo mi farà onore come se ciò fosse già avvenuto.”*

In realtà Janos Bolay aveva iniziato i propri studi con l’obiettivo di dimostrare il V Postulato ma ben presto si rende conto che, abbandonando il vincolo da esso posto, poteva nascere una Geometria diversa.
Il padre, Wolfgang, rimane tanto affascinato dagli studi del figlio che decide di pubblicarli come appendice ad una propria opera dal titolo Tantamen; il titolo dell’appendice è: *Appendix scientiam spatii absolute vera exhibens, a veritate aut falsitate axiomatis Euclidei (a propri haud unquam decidenda) indipendentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circoli geometrica,* ma il lavoro di Janos passa alla storia come Tantamen.

Gli inizi del 1833 Wolfgang Bolay invia a Gauss una copia del Tantamen, chiedendogli una opinione sulla geometria sviluppata dal figlio Janos; la risposta di Gauss non si fa attendere: “*Se comincio col dire che non posso lodare un tale lavoro tu certamente per un istante rimarrai meravigliato; ma non posso dire altro; lodarlo significherebbe lodare me stesso; infatti tutto il contenuto dello scritto, la via seguita da tuo figlio, i risultati ai quali egli perviene coincidono quasi interamente con le meditazioni che ho intrapreso in parte già da trenta-trentacinque anni. Perciò sono rimasto del tutto stupefatto….Anzi, era mia idea scrivere, col tempo, tutto ciò, perché almeno non perisse con me. E' dunque per me una gradevole sorpresa vedere che questa fatica può essermi ora risparmiata, e sono estremamente contento che sia proprio il figlio del mio vecchio amico ad avermi preceduto in un modo tanto notevole*.”

In realtà vi è un’ampia documentazione degli studi di Gauss sulle geometrie non euclidee; in particolare la corrispondenza scambiata sull’argomento con Schumacher sino dalla primavera del 1831.

Parallelamente a Bolay e Gauss un altro matematico affronta il mondo delle Geometrie non-euclidee : Nikolaj Ivanovič Lobačevskij
Lobačevskij nasce a Novgord, in Russia nel 1792 ed ha una brillante carriera accademica presso l’università di Kazan dove, nel febbraio 1826, presenta per la prima volata la sua Geometria non euclidea.
La Geometria iperbolica di Lobačevskij , coincide con quella di Bolay e di Gauss e prende spunto dall’ipotesi dell’angolo acuto che Saccheri non era riuscito a dimostrare.

Ed è proprio nell’anno della presentazione della Geometria Iperbolica di Lobacevskij (1826) che nasce a Breselenz, Georg Friedrich Bernhard Riemann.
Riemann non tenta una nuova dimostrazione del V Postulato, ben consapevole della sua impossibilità, ma evidenzia la differenza logica tra limitatezza ed infinità.
Uno spazio (in particolare una linea) può non presentare alcun limite al suo sviluppo come nel caso di uno spazio curvo (ad esempio la superficie di una sfera) dove non vi sono barriere fisiche o geometriche al proseguimento dello sviluppo di un cerchio massimo, senza che si verifichi conseguentemente la sua infinità.
Nella Geometria di Euclide che in quella di Bolay-Lobacesvkij vi è radicata l’idea di tipo sintetico a priori di uno spazio illimitato e, contemporaneamente, infinito.

La introduzione del concetto di “spazio curvo” e della conseguente definizione di un “Parametro di curvatura” consente a Riemann di catalogare le Geometrie come:

- Geometria a curvatura nulla = Geometria euclidea
- Geometria a curvatura costante positiva = Geometria ellittica (Bolay, Lobacesvkij)
- Geometria a curvatura costante negativa = Geometria iperbolica (Riemann)

GEOMETRIA IPERBOLICA

La geometria iperbolica è la versione sviluppata da Janos Bolay e da Nikolaj Lobačevskij e corrisponde all’ipotesi dell’angolo ottuso o dell’angolo acuto analizzata da Girolamo Saccheri.
In essa Il V Postulato di Euclide viene sostituito dal seguente: *da un punto complanare con una retta è possibile tracciare almeno due rette parallele alla retta data.*

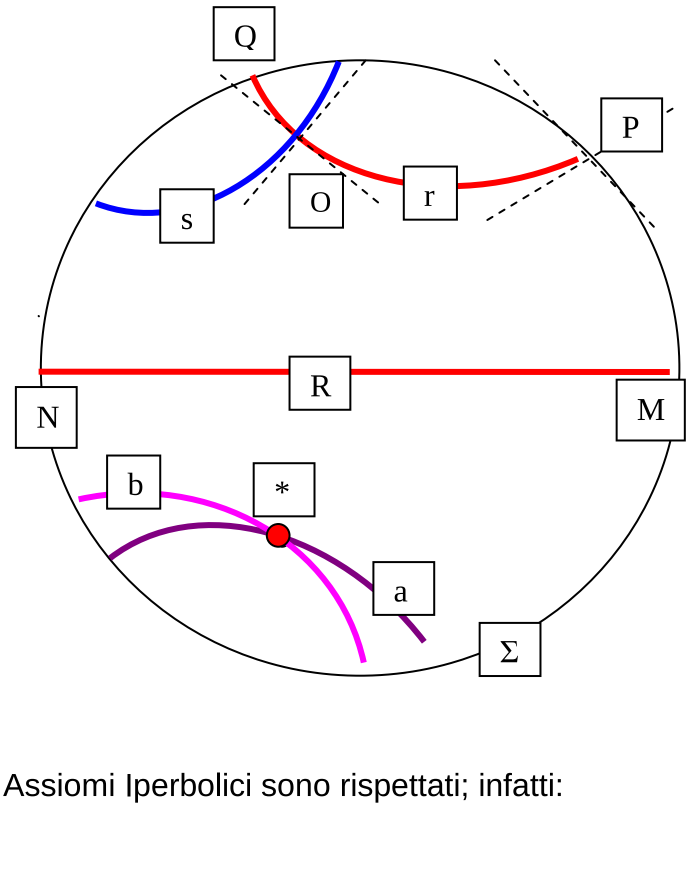
Ne segue che i 5 postulati euclidei divengono:

1. Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
2. Si può prolungare una retta oltre i due punti indefinitamente.
3. Dato un punto e un segmento, è possibile descrivere una circonferenza.
4. Tutti gli angoli retti sono congruenti.
5. Da un punto complanare con una retta è possibile tracciare almeno due rette parallele alla retta data

E’ immediato notare come i primi 4 Postulati siano identici ai corrispettivi euclidei mentre le definizioni di Punto Retta e Piano divergono in funzione del modello adottato.

Il Modello di Poincarè ammette le seguenti definizioni:

- Punto = punto interno di un cerchio privato della circonferenza
- Retta = arco di circonferenza perpendicolare ad essa
- Rette perpendicolari = perpendicolarità delle rispettive tangenti



(*) = punto del cerchio
r = retta normale a Σ in P e Q
R = retta normale a Σ in M ed N
s = retta normale a r in O

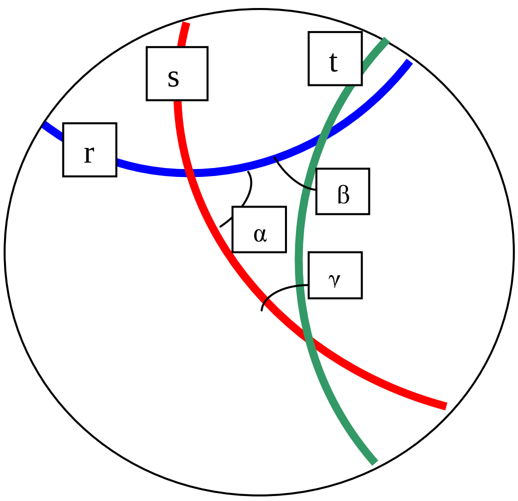
.Dal punto (*) è possibile tracciare due rette (archi) a e b che non intersecano (sono parallele) la retta R

FIG.4

Gli Assiomi Iperbolici sono rispettati; infatti:

- dati due punti interni al cerchio esiste un solo arco di circonferenza normale al perimetro passante per detti punti
- un arco di circonferenza può essere prolungato indefinitamente prima di intersecare la circonferenza essendo la stessa esclusa dall'area del cerchio
- è possibile tracciare una circonferenza dato un centro ed un segmento
- tutti gli angoli retti sono congruenti
- da un punto (*) del piano (cerchio) e possibile tracciare due rette (archi) che non intersecano (sono parallele) alla retta (diametro) data (FIG 4).

Tra i molteplici teoremi dimostrabili in campo iperbolico può essere interessante illustrare (solo visivamente) quello relativo alla somma degli angoli interni di un triangolo.



$\alpha+\beta+\gamma < 180°$

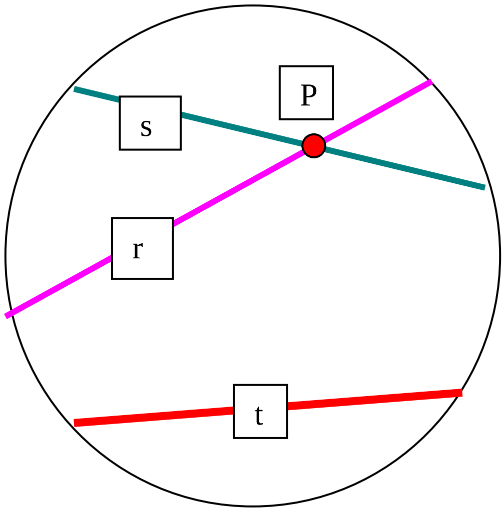
FIG 5

Il modello di Klein è simile a quello di Poincarè e prevede le seguenti definizioni:

- Punto = punto interno ad un cerchio (circonferenza esclusa)
- Retta = corda del cerchio (estremi esclusi)
- Piano = punti interni al cerchio

Anche per il modello di Klein è verificato il V Postulato non euclideo: *Per un punto complanare con una retta è possibile tracciare almeno due parallele alla retta data.*

Il problema nei modelli di Poincarè e di Klein è il rispetto del II Postulato di Euclide:" *è possibile prolungare indefinitamente la geodetica tra due punti ottenendo una Retta"* dove la limitatezza della superficie dei cerchi sembrerebbe creare un ostacolo logico.
La soluzione si trova nel definire la distanza tra due punti non come geodetica degli stessi, bensì con una relazione esponenziale tale da far aumentare asintoticamente tale distanza avvicinandosi alla circonferenza.



Le rette r ed s passanti per P sono parallele alla retta t non avendo con essa alcun punto in comune

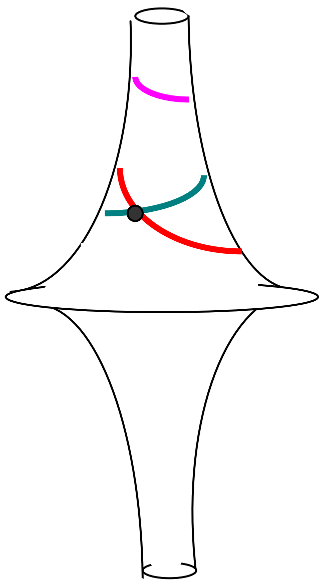
FIG.6

Il termine “Iperbolico” pare sia dovuto a Klein che intendeva evidenziare il numero “eccessivo” delle parallele che possono essere tracciate per un punto (in FIG 6 tutte quelle comprese nell’angolo tra r ed s)

Il modello di Beltrami

Un modello tridimensionale di superficie iperbolica fu proposto da Eugenio Beltrami nel 1868.

Esso è ottenibile per rotazione attorno al proprio asintoto di una curva a curvatura costante (Trattrice) ottenendosi un solido anch’esso a curvatura superficiale costante (FIG 7)



Per il punto (in colore nero) passano le rette rossa e blu entrambe parallele alla retta viola non avendo con essa alcun punto in comune

FIG. 7

GEOMETRIA ELLITTICA

Presupposto alla geometria di Riemann è la differenza concettuale tra spazio (piano, retta) illimitato ed infinito.
Su di una superficie chiusa una qualsiasi curva può essere illimitata cioè priva di limiti fisici o geometrici pur non essendo infinita (in quanto la superficie chiusa è per definizione finita).
Riemann considera la limitatezza una proprietà concreta in quanto sperimentabile e verificabile mentre l'infinità non ammette, per sua stessa definizione, alcuna verifica.
Quindi il II Postulato euclideo deve essere letto come segue : *è possibile prolungare illimitatamente (non all'infinito) la geodetica tra due punti ottenendo una retta.*

La Geometria ellittica può essere assiomatizzata, sulla base dell'opera di David Hilbert, mediante l'enunciazione di 8 Postulati di Appartenenza, 6 Postulati di Ordinamento ed 1 Postulato di Continuità ma la sua comprensione intuitiva naturale è affidata ad un esempio di superficie sferica.

In esso si definisce:

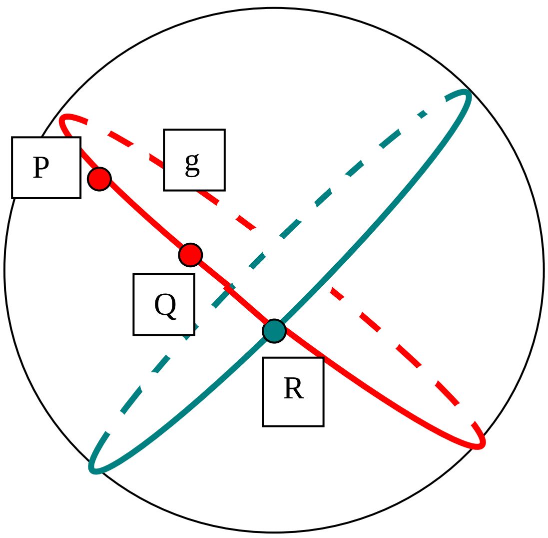
- Piano = qualsiasi superficie chiusa (nell'esempio la superficie sferica)
- Punto = i punti del piano (superficie sferica)
- Retta = prolungamento illimitato della geodetica tra due punti (ovvero il cerchio massimo passante per due punti

Appare evidente che il V Postulato euclideo diviene allora *: per un qualsiasi punto non è possibile tracciare alcuna parallela ad una retta data*
In altri termini : *non esistono parallele ad una retta data passanti per un punto (FIG 8).*

Tra i numerosi Teoremi dimostrabili in Geometria ellittica è interessante notare che:

- la somma degli angoli interni di un triangolo e sempre > di 2 angoli retti
- non esistono triangoli simili se non congruenti
- tutte le perpendicolari ad una retta passano per 2 punti diametralmente opposti (FIG. 9)

La curvatura è uno dei parametri fondamentali di una superficie o di una linea; in accordo con la definizione gaussiana essa corrisponde all'inverso del raggio del cerchio che approssima la curva nel punto considerato

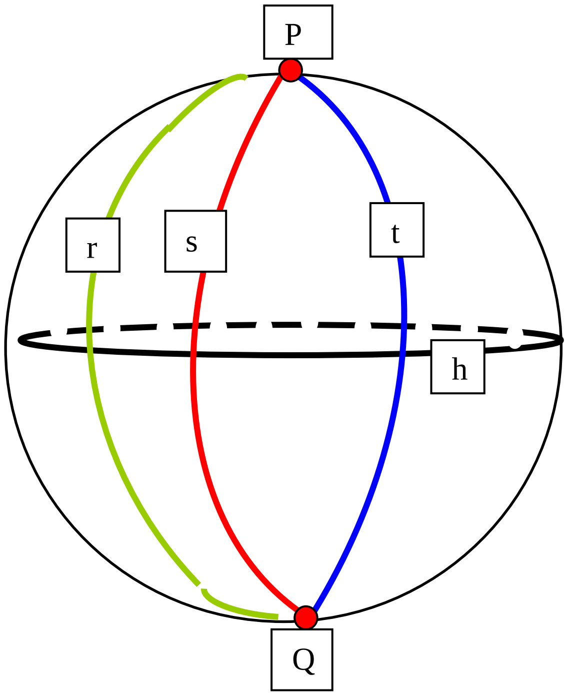


Il minimo percorso tra i punti P e Q (geodetica) è l'arco di circonferenza massima g.

Per un qualsiasi punto R passa un cerchio massimo che si interseca sempre con g.

Tutte le circonferenza massime hanno sempre almeno un punto in comune quindi non esiste alcuna parallela ad una retta data passante per un qualsiasi punto della superficie sferica.

FIG. 8



Le rette (circonferenze massime) r,s,t, normali alla retta h, passano per i punti P e Q diametralmente opposti

FIG 9

CURVATURA

Appare evidente come, nella interpretazione riemaniana della Geometria ellittica, rivesta particolare importanza il concetto di curvatura di una linea, di una retta o di una superficie.

Estendendo il concetto a spazi pluridimensionali, si può considerare la curvatura di un volume o di enti geometrici molteplicemente estesi chiamati “varietà differenziali riemaniane”

Il termine di “varietà” deriva da *Mannigfaltigkeit*, a sua volta generato dalla deformazione del termine latino Multi-plic-itas e corrisponde quindi al concetto di “Molteplicità”.

Per una descrizione, sia pure intuitiva, non rigorosa ed intrinsecamente banale del concetto di Curvatura, risulterebbe necessario iniziare dalla definizione di Cerchio Osculatore, da quelli di Curvature principali e di Curvatura gaussiana.

Poiché lo scopo del presente scritto è solo quello di mostrare intuitivamente e visivamente alcuni aspetti della Geometria ellittica ci si limiterà ad un accenno alla curvatura riemaniana.

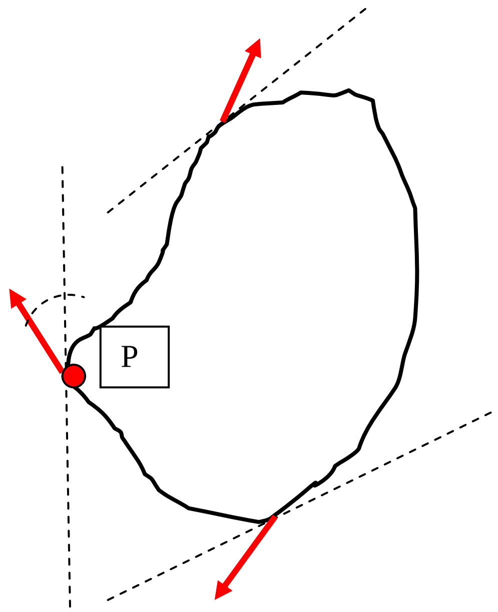
Per una “Varietà differenziabile “ è possibile determinarne la curvatura locale con un metodo intrinseco, cioè rimanendo all’interno della varietà; tale metodo è chiamato “trasporto parallelo”.

Con riferimento alla varietà “Superficie sferica” ad ogni punto di essa può essere associato un vettore che, trasportato lungo un percorso chiuso sulla superficie, cambierà direzione rispetto a quella iniziale, quando, dopo un percorso completo, riprenderà la posizione di partenza.

Tale deviazione (angolo □ FIG 11) risulta essere funzione dell’area delimitata dal percorso chiuso e dalla curvatura intrinseca della superfici sferica.

L’entità della deviazione subita dalla direzione del vettore definisce la curvatura locale della superficie ed è determinata dal “*Tensore metrico di curvatura di Riemann”*

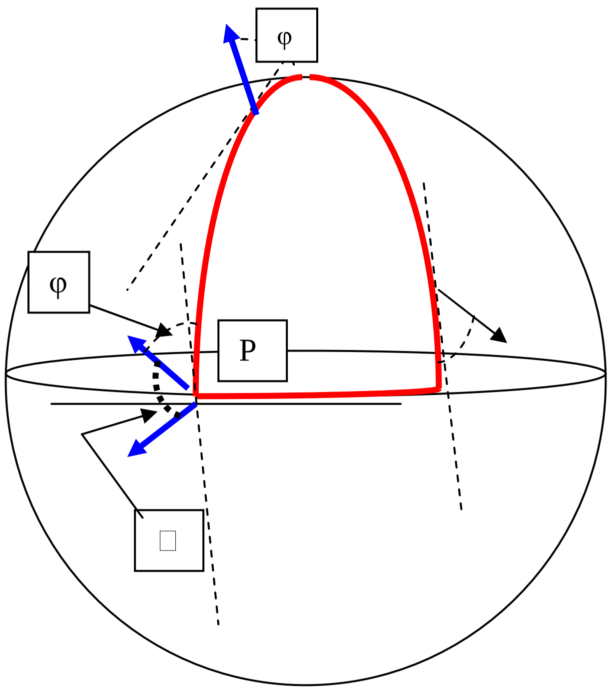
Quando, nell’ambito della Teoria della Relatività Generale, Albert Einstein si trovò a dover descrivere quantitativamente la curvatura dello Spaziotempo generata dalla concentrazione di Massa-Energia, fece ricorso agli studi di Riemann ed al Tensore Metrico di Curvatura.



Per spostamento parallelo di un vettore si intende la traslo rotazione da un punto iniziale P mantenendo costante l'angolo compreso tra vettore e tangente alla curva.

In uno spazio euclideo (piatto) una traslo rotazione completa comporta che la posizione finale del vettore conduca alla medesima posizione iniziale.

FIG.10



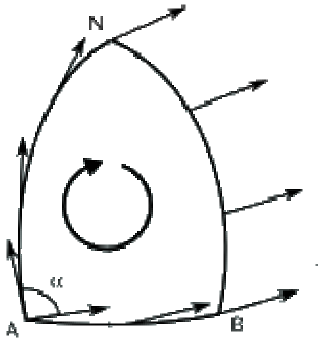
Su di una superficie curva (es: superficie sferica) viene tracciata una curva chiusa (colore rosso).
Scelto un punto P e la tangente in P alla curva si associ P ad un vettore che presenta un angolo φ con la tangente.

Il Vettore venga associato ad ogni punto della curva mantenendo costante l'angolo φ.
Ritornando alla posizione P dopo una percorrenza completa della curva il vettore presenterà un angolo □ rispetto alla posizione iniziale.
L'entità di □ è determinata mediante il tensore metrico.

FIG 11

In italiano si traduce con *varietà* il termine tedesco *Mannigfaltigkeit*, che compare per la prima volta nella tesi di dottorato del 1851 di Bernhard Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. Riemann si pone il problema di introdurre delle "grandezze molteplicemente estese", aventi cioè "più dimensioni", e le definisce usando quel termine.

Analizzando il termine come parola composta, *Mannig-faltig-keit*, si riconosce in essa un parallelo con il termine latino *multi-plic-itas*, sicché lo si potrebbe tradurre letteralmente come 'molteplicità'.



Trasporto parallelo di un vettore lungo un percorso chiuso su una sfera: al termine del percorso $ANBA$ il vettore risulta deviato a causa della curvatura della sfera stessa.

Una varietà differenziabile può venire dotata di una ulteriore struttura che ne determina la metrica (varietà riemanniana o pseudo-riemanniana), e con essa la curvatura; tale struttura è definita dal tensore di curvatura di Riemann.

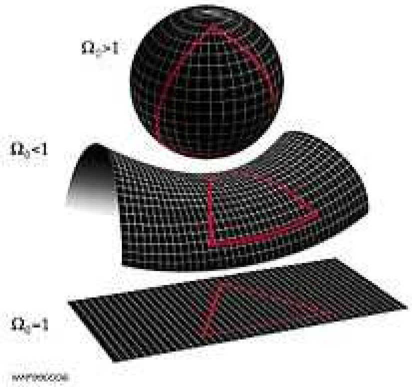
L'oggetto così definito è strettamente legato ad una definizione intrinseca della curvatura, denominata trasporto parallelo: esso si esegue trascinando punto per punto un vettore lungo un percorso chiuso contenuto nella varietà, in modo che la direzione del vettore (riferita alla varietà e non allo spazio che la contiene) non cambi. Dopo aver percorso un giro completo, il vettore non coincide più con il vettore originario, ma risulta deviato di una quantità che dipende sia dall'area della superficie delimitata dal percorso chiuso, sia dalla curvatura intrinseca della superficie stessa (per superfici piatte la deviazione è nulla).

Utilizzando la notazione di Einstein per i tensori, l'entità della variazione subita da un vettore per un trasporto parallelo lungo il bordo della superficie Σ è data da:

$$\Delta A^{\mu} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} dS^{\beta\sigma} R^{\mu}_{\nu\beta\sigma} A^{\nu}.$$

La curvatura dello spazio fisico e la gravità

Per approfondire, vedi ***Relatività generale***.



Raffigurazione dei tre possibili destini dell'Universo secondo la teoria della relatività: dall'alto, Universo finito a curvatura positiva, universo infinito a curvatura negativa, universo piatto a curvatura nulla.

Secondo la teoria della relatività generale, la gravità è espressione della curvatura dello