

La bremsstrahlung e l'esistenza del fotone

Fausto Vezzano

sitofausto@gmail.com

Sommario

Il fenomeno della bremsstrahlung viene di solito considerato una prova dell'esistenza del fotone, solo in virtù dell'esistenza di una frequenza limite dipendente dall'energia degli elettroni incidenti. Voglio qui proporre una leggera modifica dell'apparato sperimentale, allo scopo di rendere ancora più inoppugnabile l'esistenza del fotone e permettere di fare alcune considerazioni.

1 I fatti sperimentali

La bremsstrahlung viene normalmente studiata con un apparecchio che possiamo schematizzare in questo modo.

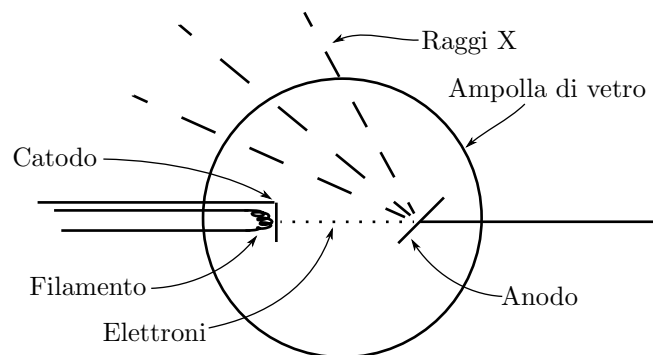


Figura 1: Apparecchio per lo studio della bremsstrahlung.

Un filamento riscaldato emette elettroni che vengono accelerati all'interno di una ampolla nella quale è stato fatto il vuoto. Quando gli elettroni colpiscono l'anodo, se la differenza di potenziale è abbastanza elevata, si osserva l'emissione di una radiazione che, in seguito a esperimenti opportuni, si è rivelata essere radiazione elettromagnetica, e precisamente radiazione X.

2 Studio dell'urto di un elettrone contro un bersaglio puntiforme

Lo studio completo dell'urto di un elettrone contro un bersaglio puntiforme, accompagnato dall'emissione di un fotone, appare assai laborioso. Osserviamo però che il fotone sarà caratterizzato da energia massima (a parità dell'energia dell'elettrone urtante contro il bersaglio a riposo) quando, in seguito all'urto, elettrone e bersaglio avranno la stessa velocità¹

Ovviamente occorre anche supporre che nell'urto considerato venga espulso un solo fotone, in caso contrario l'energia verrà spartita in più fotoni, nessuno dei quali avrà la massima energia possibile.

Se queste condizioni sono soddisfatte, si può dimostrare² che l'energia del fotone espulso in seguito all'urto è

$$E_f = \frac{K}{1 + \frac{K+mc^2 - \cos\theta \sqrt{K(K+2mc^2)}}{Mc^2}} \quad (1)$$

dove K è l'energia cinetica dell'elettrone incidente, θ è l'angolo tra la direzione iniziale degli elettroni e la direzione del fotone prodotto, m è la massa dell'elettrone e M è la massa del bersaglio.

Le considerazioni fatte, ci portano a concludere che la 1 restituisce l'energia *massima* che il fotone può possedere, in corrispondenza di un certo angolo θ di scattering.

3 Variante dell'esperimento

3.1 Descrizione della variante

Va osservato che per la validità dell'equazione 1 non è affatto necessario che l'elettrone si arrestiⁱ, ma solo che dopo l'urto si muova in modo solidale al corpo di massa M contro il quale ha urtato, purché il corpo urtato sia inizialmente fermo (condizione che, s'intende, può essere verificata solo approssimativamente).

Perché l'esperimento sia significativo, occorre scegliere bersagli leggeri. In caso contrario il secondo termine al denominatore nella 1 diventa molto piccolo e l'energia massima del fotone finisce per non dipendere da θ (e a coincidere semplicemente con l'energia massima dell'elettrone). Inoltre bisogna usare come bersaglio particelle positive, in modo che sia possibile per l'elettrone urtarle in modo totalmente anelasticoⁱⁱ.

ⁱCiò avviene solo nel caso limite $M \gg m$, come avviene nell'esperimento descritto nel paragrafo 1 (in questa situazione si ha, banalmente, $E_f = K$).

ⁱⁱL'elettrone può infatti in questo caso andare a formare uno stato stazionario (occorre anche ipotizzare che l'energia caratteristica di tale stato sia trascurabile rispetto alle altre energie in gioco).

Ciò suggerisce la possibilità di studiare la radiazione emessa dagli elettroni in seguito a urti contro i protoniⁱⁱⁱ di un fascio che interseca trasversalmente il loro cammino.

Infine mi pare necessario fare una considerazione sull'ipotesi di fissità del bersaglio: la velocità dei protoni deve essere sufficientemente piccola. Quanto piccola? Quanto basta perché

- a) i risultati dell'esperimento siano simmetrici rispetto all'asse definito dal fascio di elettroni incidente
- b) variazioni significative della velocità (ad esempio se viene raddoppiata o dimezzata) non portino a variazioni significative nel risultato dell'esperimento

Se queste condizioni vengono soddisfatte l'ipotesi di fissità del bersaglio è ragionevolmente soddisfatta.

3.2 Considerazioni numeriche

Se gli elettroni sono da 50 keV, e se le particelle urtate sono protoni, la formula 1 può essere riscritta numericamente in questo modo^{iv} (in termini di frequenza)

$$\nu_f = \frac{1,2082723}{1 - 0,0002466 \cdot \cos \theta} \cdot 10^{19} \text{ Hz} \quad (2)$$

È evidente dalla formula che la dipendenza da θ è molto debole, tuttavia è indubbiamente misurabile. Possiamo stilare una tabella di questo tipo e graficare come in figura 2.

Angolo	ν_f (10^{19} Hz)
0°	1,20857
30°	1,20853
60°	1,20842
90°	1,20827
120°	1,20812
150°	1,20801
180°	1,20797

ⁱⁱⁱSebbene molto più massivi degli elettroni, sono le più leggere particelle positive reperibili con una certa facilità.

^{iv}Le cifre che utilizzerò nel seguito sono evidentemente troppe, considerate le incertezze che si incontrerebbero in un esperimento reale, ma non è mia intenzione analizzare nel dettaglio questi aspetti del problema.

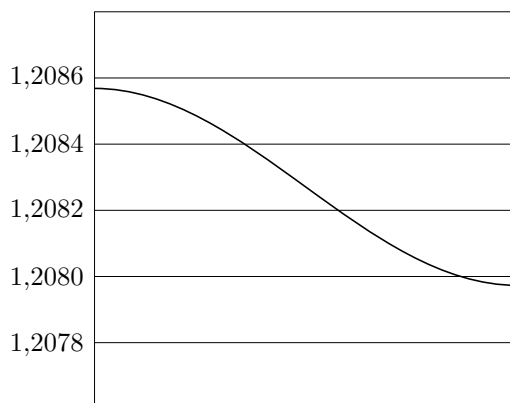


Figura 2: Frequenza massima dei fotoni prodotti (è inteso che l’asse delle ascisse spazia da 0° a 180° e che sull’asse delle ordinate abbiamo la frequenza in unità di 10^{19} Hz, come in tabella).

Possiamo osservare che tra il valore massimo (che si osserva per i fotoni “sparati” in avanti, cioè con θ nullo) e il valore minimo (fotoni indietro) la differenza di frequenza massima è solo dello 0,05%. Un effetto molto piccolo^v ma, a mio avviso, anche molto significativo. Spiegherò il perché nel paragrafo conclusivo.

4 Considerazioni conclusive

L’effetto fotoelettrico mostra che la luce è *assorbita* in quanti. L’effetto Compton mostra che la luce *interagisce* con la materia come se fosse costituita di quanti. Vi sono anche aspetti sperimentali che si sposano con la teoria solo assumendo che la luce è *prodotta* (oltre che assorbita) *in quantità discrete* (si pensi alla spiegazione dei dati spettrali, o alla derivazione di Einstein della legge di Planck). Tuttavia l’esperimento qui descritto è più diretto, e mostra che le quantità discrete di energia prodotte vanno considerate puntiformi (il che non è affatto una conseguenza diretta della discretizzazione degli scambi energetici).

Per spiegare ciò che (presumibilmente) si osserva nell’esperimento descritto siamo costretti a supporre che il fotone, inteso come particella puntiforme, esisteva *sin da quando è stata generata l’onda elettromagnetica*, in prossimità dell’elettrone e del protone. In questo senso mi sembra che l’esperimento abbia delle affinità con quello di Compton (nel quale però la natura corpuscolare emerge “a metà strada” tra la formazione dell’onda e la rivelazione finale), ma che sia ancora più diretto e decisivo perché dobbiamo supporre che gli aspetti

^vUsando positroni al posto dei protoni, lo 0,05% diventa un bel 55%, scompare la difficoltà nel rivelare l’anisotropia della radiazione prodotta ma emerge la difficoltà (presumibilmente maggiore) di produrre un fascio di positroni lenti. . .

corpuscolari erano presenti “nello stesso istante”, se così si può dire, in cui è stata generata l'onda elettromagnetica.

L'esistenza di una funzione che mette in relazione in quel modo la frequenza massima con la posizione angolare del rivelatore, appare completamente incompatibile con qualsiasi tentativo di interpretare l'emissione in termini di campo continuo che manifesti la sua natura corpuscolare solo in qualche momento successivo.

Il fatto che l'emissione avviene sempre in quanti ha conseguenze teoriche interessanti, per esempio una carica puntiforme accelerata da un campo elettrico uniforme^{vi}, anche se si muovesse nel vuoto più spinto, devierebbe in modo casuale: il punto d'impatto su uno schermo sarebbe descritto da una distribuzione di probabilità di tipo gaussiano, anche se le condizioni iniziali fossero note con precisione.

Dimostrazioni

¹Consideriamo infatti l'urto nel sistema di riferimento R in moto alla velocità finale del sistema elettrone+bersaglio. In tale sistema di riferimento, prima dell'urto abbiamo due particelle, in moto l'una verso l'altra (su rette diverse), ciascuna con una certa energia cinetica. Dopo l'urto entrambe le particelle hanno perduto tutta la loro energia cinetica cedendola al fotone, che quindi possiede la massima energia possibile compatibile con la situazione iniziale.

²Nel sistema di riferimento inizialmente in quiete con il bersaglio, la conservazione dell'energia e della quantità di moto possono essere riordinate in questo modo

$$\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_f = \frac{M + m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} \quad (3)$$

$$E_e + Mc^2 - E_f = \frac{(M + m)c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4)$$

dove \mathbf{v} è la velocità finale del sistema elettrone+bersaglio (e $v = |\mathbf{v}|$), E_e e p_e sono l'energia (totale) e la quantità di moto dell'elettrone incidente, E_f è l'energia del fotone prodotto, \mathbf{p}_f la sua quantità di moto, mentre m e M sono le masse dell'elettrone e del bersaglio urtato. Moltiplichiamo la prima equazione per c , poi eleviamo entrambe al quadrato

$$p_e^2 c^2 + p_f^2 c^2 - 2p_e p_f c \cos \theta = \frac{(M + m)^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5)$$

$$E_e^2 + M^2 c^4 + E_f^2 + 2E_e M c^2 - 2E_e E_f - 2M c^2 E_f = \frac{(M + m)^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (6)$$

Nella prima sostituiamo $p_f c = E_f$ e $p_f c = \sqrt{K(K + 2mc^2)}$, nella seconda $E_e = K + mc^2$. Poi sottraiamo la prima alla seconda, ottenendo (si noti che K^2 , $2Kmc^2$ e E_f^2 , si annullano)

$$\begin{aligned} m^2 c^4 + M^2 c^4 + 2(K + mc^2)M c^2 - 2(K + mc^2)E_f - 2M c^2 E_f + 2\sqrt{K(K + 2mc^2)} \cos \theta E_f &= \\ = (M + m)^2 \cdot \frac{c^2(c^2 - v^2)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} & \quad (7) \end{aligned}$$

Il termine moltiplicativo in fondo vale, a conti fatti, semplicemente c^4 . Sviluppando allora il secondo membro ci si accorge che tutti i termini hanno un rispettivo termine al primo membro che li annulla. A questo punto non resta che risolvere rispetto a E_f e riordinare come la 1.

^{vi}Non prendo in considerazione il caso del campo gravitazionale perché l'emissione è paradossalmente incompatibile con il principio di equivalenza e non so venire a capo.