Una formula generale per l'accelerazione di un punto in moto

Fausto Vezzaro

sitofausto@gmail.com

Per un corpo puntiforme in moto arbitrario, l'accelerazione può essere scritta in questo modo

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{T} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{N}$$

dove $\boldsymbol{T}$ è il versore tangente alla traiettoria diretto come il moto, $v \equiv \frac{ds}{dt}$, $R \equiv \frac{|ds|}{|d\boldsymbol{T}|}$ e $\boldsymbol{N}$ è un versore normale alla traiettoria così definito $\boldsymbol{N} \equiv R\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}$. In queste formule s è l'ascissa curvilinea, cioè la lunghezza dell'arco di traiettoria compreso tra il punto in moto nell'istante considerato e un punto di riferimento sulla traiettoria (con segno, va assegnato un verso arbitrario alla traiettoria).

Dimostrazione

Per prima cosa mostriamo che $\boldsymbol{N}$ è effettivamente un versore normale alla traiettoria: $\boldsymbol{T}$ è un versore per definizione quindi $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T} = 1$, derivando in s si trova $2\boldsymbol{T} \cdot \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = 0$ quindi $\boldsymbol{N} \perp \boldsymbol{T}$ (oppure $\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = 0$, ma in tal caso il punto sta procedendo in moto rettilineo, faccio considerazioni più avanti per quanto riguarda questo caso particolare). Quanto al fatto che $\boldsymbol{N}$ sia un versore, basta calcolare i moduli nella sua definizione, e sfruttare la definizione di R.

Ora che abbiamo visto che la tesi è ben impostata, senza contraddizioni, passiamo alla dimostrazione vera e propria. Possiamo scrivere la velocità come $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{T}$. Derivando in t, si ha

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{T} + v\frac{d\boldsymbol{T}}{dt} \tag{1}$$

Quindi per terminare la dimostrazione dobbiamo mostrare che

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dt} = \frac{v}{R}\boldsymbol{N} \tag{2}$$

Per mostrarlo scriviamo

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{3}$$

Ma $\frac{ds}{dt} \equiv v$, e per definizione di $\boldsymbol{N}$ abbiamo anche $\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{\boldsymbol{N}}{R}$. Quindi l'identità 3 implica la 2 (alla quale avevamo ridotto la nostra tesi). La dimostrazione è così terminata.

Considerazioni

Va osservato che $\boldsymbol{N}$ è diretto come $d\boldsymbol{T}$ quindi, tra gli infiniti versori normali a $\boldsymbol{T}$ a un dato istante, $\boldsymbol{N}$ è proprio quello diretto "verso l'interno" della curva. O come si dice, verso il centro di curvatura (verso il centro della circonferenza che approssima meglio la curva in quel punto).

Abbiamo definito R come un rapporto tra infinitesimi, ma possiamo definirlo, forse più convenzionalmente, come l'inverso del modulo di una vera e propria derivata (vettoriale): $R = \frac{1}{|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}|}$. Qualunque sia il modo in cui vogliamo riordinare i termini, è chiaro che:

- Se al variare di s il versore tangente non varia ($ds \neq 0$, $d\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}$), il raggio di curvatura "va a infinito": il punto sta percorrendo un tratto rettilineo. In un certo senso si può applicare la formula anche a questo caso limite: è vero che non possiamo definire il versore $\boldsymbol{N}$, ma ciò non rappresenta un reale problema perché il divergere di R elimina il secondo termine $\frac{v^2}{R}\boldsymbol{N}$ nella formula lasciando solo la scontata $\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{T}$.

- Se al variare di s il versore tangente varia poco ($|d\boldsymbol{T}| \ll |ds|$), il raggio di curvatura è grande: il punto sta curvando poco.

- Se al variare di s il versore tangente varia molto ($|d\boldsymbol{T}| \gg |ds|$), il raggio di curvatura è piccolo: il punto sta curvando molto.

Sottolineiamo infine che sia il raggio di curvatura che i versori tangente $\boldsymbol{T}$ e normale $\boldsymbol{N}$, in un dato punto della traiettoria, sono caratteristiche della traiettoria stessa, e non del particolare moto del punto (vi è solo una ambiguità per quanto riguarda il verso del versore $\boldsymbol{T}$, in un senso o nell'altro a seconda della direzione del moto; inoltre in certe situazioni, anche se il moto è noto, i versori $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{N}$ non possono essere definiti[1]). Certamente l'accelerazione alla quale è sottoposto il punto dipenderà invece dalla velocità con la quale percorre la traiettoria.

[1] Abbiamo visto che il versore $\boldsymbol{N}$ è indeterminato nei tratti rettilinei, ma possono sorgere problemi anche con il versore $\boldsymbol{T}$: se un sasso è lanciato verticalmente, nell'istante in cui raggiunge il punto più alto sia $\boldsymbol{N}$ che $\boldsymbol{T}$ sono indeterminati (eppure, a ben vedere, la formula $\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{T} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{N}$ funziona perfino in quell'istante).