IL TENSORE METRICO FONDAMENTALE

SINTESI (Abstract)
Modellazione grafica di superfici curve bidimensionali immerse in uno spazio 3 D, volta ad una comprensione semi-intuitiva della geometria riemaniana.
Graphic modeling of two-dimensional curved surfaces in 3 D space, for semi-intuitive understanding of Riemann's geometry.

INTRODUZIONE
Le proprietà metriche di un ente geometrico n-dimensionale R^n possono essere espresse compiutamente da relazioni tra n variabili indipendenti; in particolare per una retta R^1 è sufficiente una variabile mentre per una superficie R^2 ne sono necessarie e sufficienti 2 .

Una retta è normalmente espressa da una equazione lineare del tipo: ax+by+c = 0 (forma implicita) mentre una curva piana ammette una equazione implicita del tipo: f(x,y) = 0.
Tale rappresentazione cartesiana rispecchia la visione di un osservatore appartenente ad uno spazio bidimensionale di coordinate ortonormali xy esterno agli enti geometrici interessati (retta o curva piana)
Del tutto analogamente una superficie R^2 espressa da una equazione del tipo f (x,y,z) = 0 rispecchia la visione di un osservatore esterno ed appartenente allo spazio R^3 in cui la superficie è immersa.

Il problema sorge allorché si voglia rappresentare analiticamente le proprietà metriche di un solido tridimensionale che, per una sua espressione analitica cartesiana, richiederebbe uno spazio R^4 precluso alla visione e comprensione elementare umana.
Tale problema è tipicamente afferente alla Relatività Generale di Albert Einstein che vede lo spazio (o lo spaziotempo) deformato da massa-energia

La soluzione proviene dalla possibilità di esprimere le proprietà metriche di uno spazio R^n con sole n variabili indipendenti, rimanendo all'interno dello spazio stesso.

PARAMETRIZZAZIONE
Le principali superfici geometriche, solitamente espresse da equazioni esplicite y = f(x,z) o nella forma implicita f(x,y,z) = 0 in uno spazio euclideo $\mathcal{R}^3$ possono venire parametrizzate assumendo la forma:

$$\begin{aligned} x &= f\,(U,V) \\ y &= g\,(U,V) \qquad\qquad (1.1) \\ z &= h\,(U,V) \end{aligned}$$

dove U, V sono variabili reali indipendenti.
Le due variabili U,V sono sufficienti ad individuare ogni punto del piano (figura geometrica appartenente a $\mathcal{R}^2$) immerso in uno spazio tridimensionale x,y,z $\mathcal{R}^3$

Un piano euclideo di equazione generica :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1.2)$$

può venire parametrizzato come segue:

$$x = aU + bV + c \qquad (1.3)$$

$$y = a'U + b'V + c'$$
$$z = a''U + b''V + c''$$

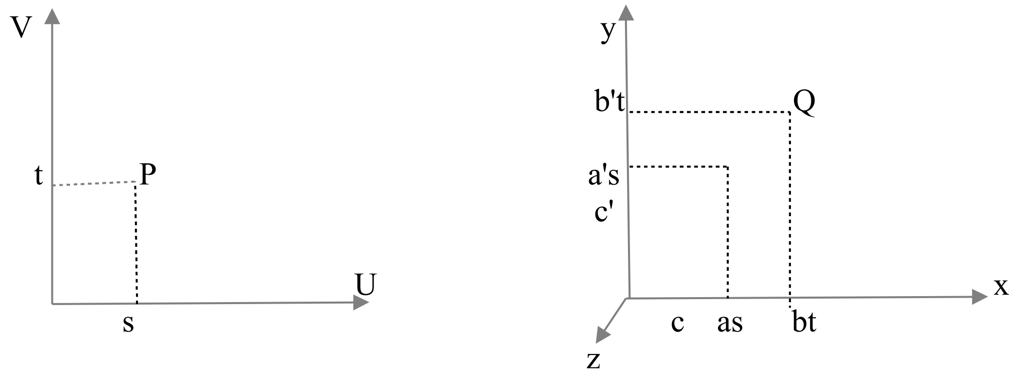
con a,b,c ed analoghi parametri reali

Fissato il dominio entro cui possono variare U e V si possono ottenere infinite terne di valori x, y, z ad ognuno dei quali corrisponde un punto del piano.

Si impongano le condizioni :

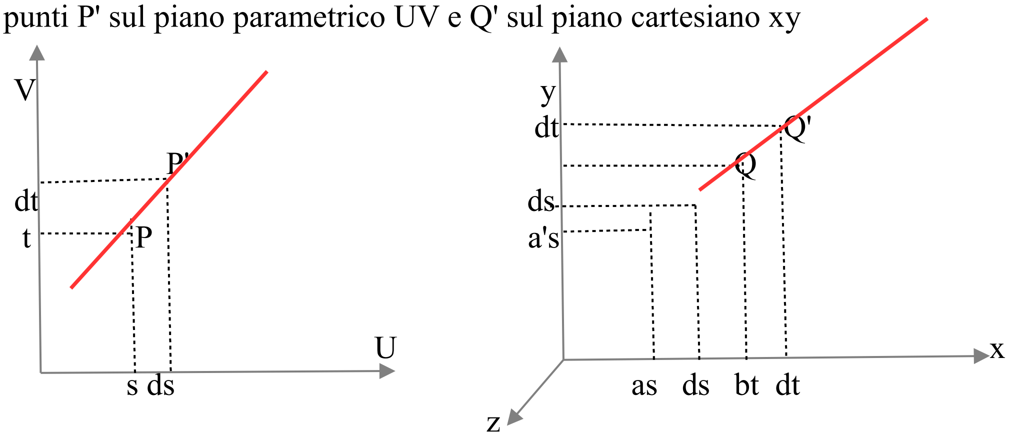
$z = 0$ cui corrisponde il piano xy
$U = s$
$V = t$

ottenendosi il punto P sul piano parametrico UV ed il corrispondente punto Q sul piano cartesiano.



$x = as + bt + c$
$y = a's + b't + c'$ dalle (1.3)

Si imponga un incremento differenziale ad U ed a V ottenendo U +dU e V + dV cui corrispondono due ulteriori punti P' sul piano parametrico UV e Q' sul piano cartesiano xy



P e P' sul piano parametrico e Q Q' sul piano cartesiano individuano una ed una sola retta

S*UPERFICI CURVE IMMERSE IN* $\mathcal{R}^3$

Passando dal piano euclideo ad una superficie curva Λ immersa in uno spazio $\mathcal{R}^3$ gli assi coordinati U,V dovranno appartenere alla superficie e quindi non potranno essere rette ortogonali in senso euclideo.

Sia data l'equazione parametrica di una superficie curva :

$$x = f(U,V)$$
$$y = g(U,V) \qquad (1.4)$$
$$z = h(U,V)$$

Ad un generico punto P sulla superficie corrisponderanno precisi valori di U,V precisamente:

$$x_P = f(U_P\, V_P)$$

$$P = \quad y_P = g(U_P\ V_P) \qquad (1.5)$$
$$z_P = h(U_P\ V_P)$$

mentre ad un secondo punto Q appartenente ad un intorno dΣ di P corrisponderanno le seguenti coordinate curvilinee:

$$x_Q = x_P + d\ f\ (U_P, V_P)$$
$$y_Q = y_P + d\ g\ (U_P\ , V_P) \qquad (1.6)$$
$$z_Q = z_P + d\ h\ (U_{P,}, V_P) = 0$$

In altri termini le coordinate cartesiane del punto Q differiranno dell'incremento differenziale df + dg, da quelle del punto P. Gli incrementi differenziali sono:

$$df(U,V) = \frac{(\partial f(U,V))}{(\partial U)} dU + \frac{(\partial g(U,V))}{(\partial V)} dV \qquad (1.7)$$

La distanza tra P e Q sarà $ds^2 = dx^2 + dy^2$ sul piano cartesiano e sulla scorta del Teorema di Pitagora.

Il punto concettualmente rilevante consiste nell'ammettere che a meno di differenziali del II ordine il piano x,y,z coincida con la superficie curva Λ (e pertanto x coincide con U ed y con V) in un intorno dΣ di P.

Ne segue che:

$$\mathbf{ds^2 = dx^2 + dy^2 = [(\partial f/\partial x)^2 + (\partial g/\partial x)^2]\, dx^2 + 2[\partial f/\partial x . \partial g/\partial y + \partial g/\partial x . \partial g/y\ ] dx.dy + [\ (\partial f/\partial y)^2 + (\partial g/\partial y)^2]\ dy^2} \qquad (1.8)$$

Allo scopo di rendere graficamente più agevole la gestione della (1.8) sono state adottate varie convenzioni di cui le più note sono il simbolismo di Christoffel e quello di Einstein.

Si ponga:

$$g_{11} = (\partial f/\partial x)^2 + (\partial g/\partial x)^2$$
$$g_{12} = g_{21} = \partial f/\partial x . \partial g/\partial y + \partial g/\partial x . \partial g/y$$
$$g_{22} = (\partial f/\partial y)^2 + (\partial g/\partial y)^2$$

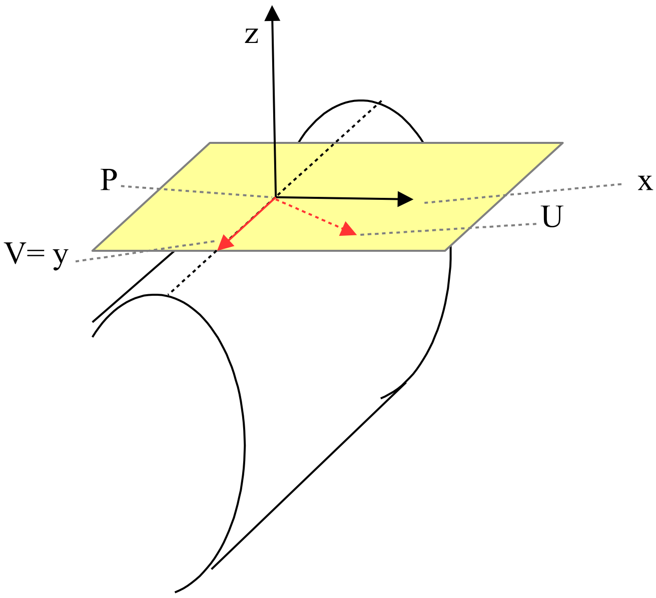
quindi la (1.8) diviene $\mathbf{ds^2 = g_{11}\ (dx)^2 + 2\ g_{12}\ dx.dy + g_{22}\ (dy)^2}$ oppure anche:

$$\mathbf{ds^2 = g_{ij}\ dx_1^{\ i} .\ dx_2^{\ j}} \qquad (1.9)$$

avendo posto $x = x_1$ $y = x_2$ e i,j =1,2 e con la convenzione che gli indici ripetuti sottointendano la sommatoria dei termini.

Sintetizzando: la superficie Λ è considerabile metricamente equivalente al pino tangente ad essa in un intorno dΣ di un qualsiasi suo punto P; la geometria che ne deriva è rappresentata dal tensore metrico (1.9).

Da esso sono derivabili le principali funzioni geometriche di Λ quali le sue geodetiche e la sua curvatura locale.
Le geodetiche sono le curve ottenibili dalla variazione di V ponendo U = 0 e ponendo V= 0 con U variabile nel dominio prefissato, mentre per la curvatura si rimanda al Tensore di Curvatura di Riemann (oggetto di altro articolo)



E' del tutto naturale la estensione a spazi pluridimensionali immersi in spazi a n+1dimesioni