Trasporto parallelo vettoriale

dr.ing. Alberto Sacchi
Sviluppo Progetti Avanzati srl
ing.sacchi@alice.it

0) SINTESI (abstract)

Descrizione elementare tipicamente geometrico figurativa del trasporto parallelo di un vettore su di una superficie curva in uno spazio tridimensionale quale premessa allo sviluppo del tensore di curvatura di Riemann

Geometric-elementary parallel vector transport on curved surface in 3-D space as prerequisite of curvature Riemann tensor

1) NOTA INTRODDUTTIVA (introductory note)

Prof. Tullio Levi Civita - Da capitolo I- Parte Prima - Lezioni di calcolo differenziale assoluto - Alberto Stock Editore - Roma

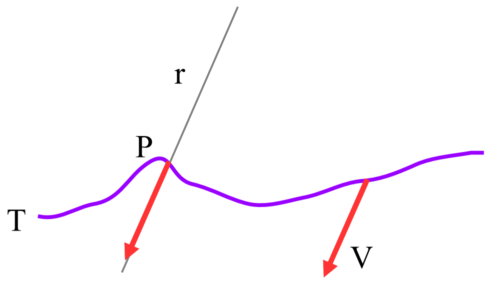
Avviene frequentemente in geometria analitica che relazioni algebriche di forma complicata traducano proprietà geometriche semplici, si che , mentre quelle relazioni algebriche mal si prestano ad essere enunciate in parole, si può invece, usando il linguaggio delle geometria, esprimere le equivalente relazioni geometriche in modo chiaro, conciso ed accessibile all'intuizione; spesso poi le relazioni geometriche sono più facili da scoprire che non quelle analitiche corrispondenti, si che il linguaggio geometrico fornisce non solo un espressivo mezzo di esposizione , ma anche un efficace strumento di ricerca.

Ed è nel rispetto del pensiero di Levi Civita che nel presente scritto non solo si farà riferimento a superfici bidimensionali immerse in R3, unico spazio che ci è concesso di percepire concretamente, ma anche si rappresenteranno graficamente le varie proprietà geometriche trattate. La visione fisica, tramite disegni prospettici fornisce una immediata comprensibilità delle varie relazioni analitiche definenti il trasporto parallelo vettoriale.

2) TRASPORTO PARALLELO DI CURVE PIANE (plane curves parallel transport)

Il trasporto parallelo di un vettore lungo una curva piana comporta la invarianza di modulo, direzione e verso.
E' il V Postulato di Euclide (da un punto P su di un piano è possibile tracciare una ed una sola parallela r ad una retta data) che determina la direzione, mentre verso e modulo sono garantiti dalla isotropia dello spazio euclideo

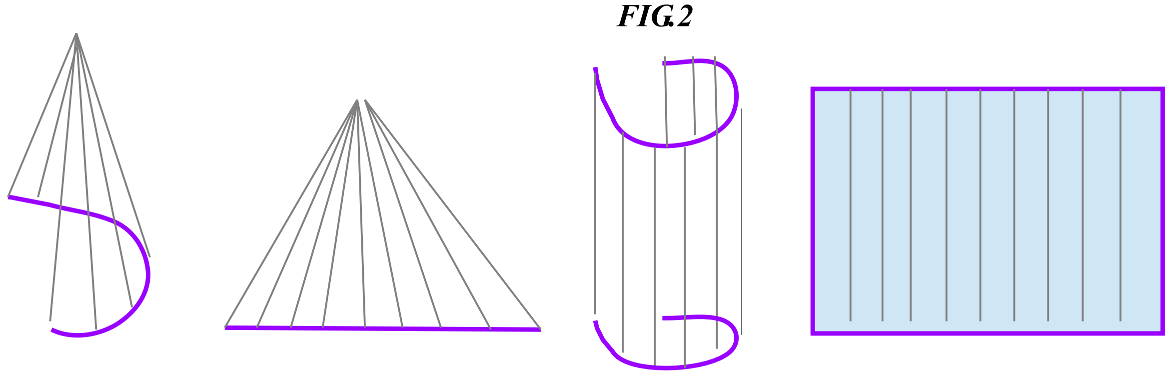
FIG.1



3) TRASPORTO PARALLELO SU SUPERFICI SVILUPPABILI

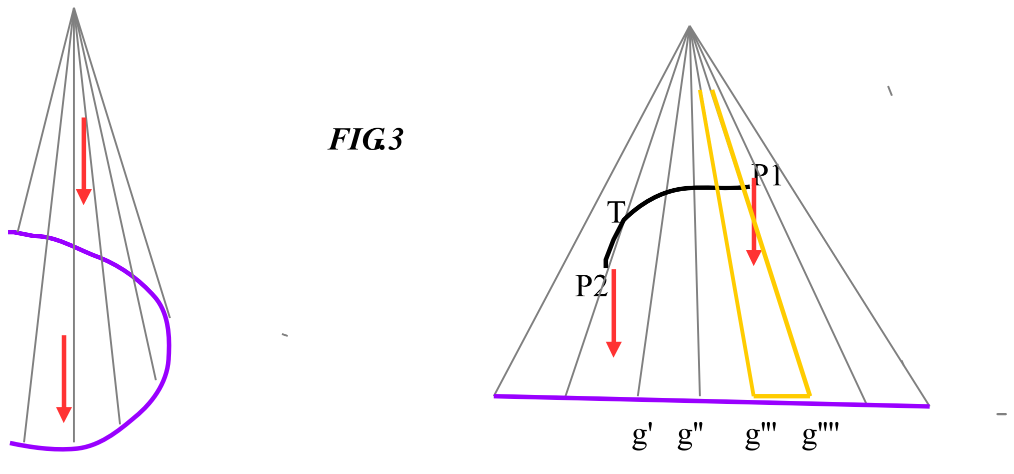
Quale esempio si consideri la superficie di una cilindro avente come base un curva piana aperta od un cono con base curvilinea (FIG.2)

FIG.2



Su di una superficie sviluppabile Λ si può traslare parallelamente un vettore **V** da P1 a P2 seguendo una qualsivoglia curva di trasporto T semplicemente operando sul piano su cui si è sviluppata Λ esattamente come descritto al precedente paragrafo e successivamente ripristinando la curvatura iniziale “riavvolgendo” il piano.(FIG.3)

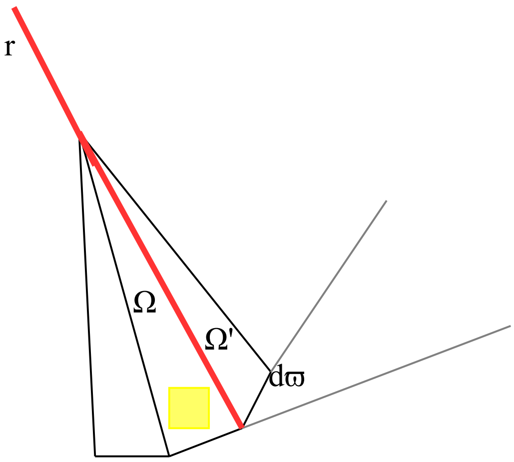
FIG.3



Infatti una superficie sviluppabile è detta anche rigata intendendosi che sia possibile costruire una famiglia infinita di rette interamente contenute in essa.

La possibilità di “riavvolgere” il piano su cui è stata sviluppata la curva è determinata dalla dimensione infinitesima della superficie triangolare (colorata in giallo) dovuta all' infinità numerabile delle rette g', g'', g''', g'''' ecc.
Ne deriva che l'angolo ϖ di cui ciascun superficie piana triangolare è ruotata rispetto alla successiva è differenziale, cioè è = dϖ (FIG.4)
La rotazione avviene attorno alla curva r che separa la superficie (nel caso particolare illustrato trattasi di superficie triangolare) Ω dalla superficie Ω'

FIG.4



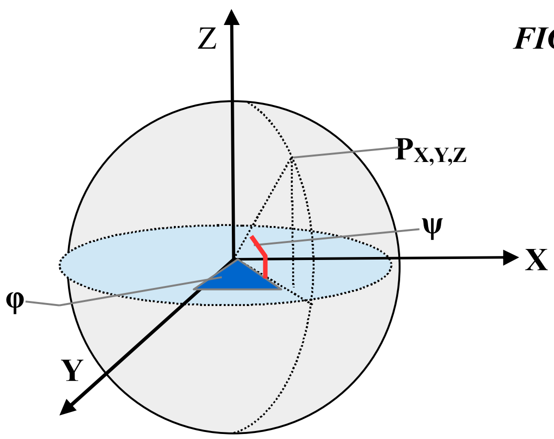
3) PARAMETRIZZAZIONE (parameterization)

Poiché per definire compiutamente una superficie bidimensionale sono sufficienti 2 variabili (sul piano cartesiano ascissa X ed ordinata Y) la parametrizzazione della equazione cartesiana di una sfera di raggio R e con il centro all'origine degli assi ($X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$) diviene:

$$\begin{aligned} X &= X(x^1, x^2) \\ Y &= Y(x^1, x^2) \\ Z &= Z(x^1, x^2) \end{aligned} \qquad (3.1)$$

dove X,Y,Z sono gli assi cartesiani ortonormali mentre x^1 e x^2 s sono variabili specifiche della superficie interessata.
Nel caso particolare (esempio esplicativo) di una sfera x^1 e x^2 possono essere gli angoli φ e ψ (FIG.5) od una loro funzione trigonometrica mentre nel caso generale di una superficie bidimensionale immersa in uno spazio 3D sono le (1.1)

FIG.5



$X = R \cos\psi \cos\varphi$
$Y = R\ \mathrm{sen}\varphi \cos\psi$
$Z = R\ \mathrm{sen}\psi$

4) TRASPORTO PARALLELO SU DI UNA VARIETA' NON SVILUPPABILE

(parallel transport on generical 2D surface)

Nel seguito si farà specifico riferimento (per semplicità di rappresentazione grafica) alla superficie non sviluppabile di una sfera.
La sfera è non sviluppabile o, equivalentemente, è una superficie non rigata, non potendosi tracciare su di essa una retta od una porzione di retta (segmento rettilineo) completamente contenuto in essa (cioè giacente sulla superficie)
Il trasporto parallelo su tale tipologia di superfici Λ è effettuabile mediante lo stesso processo geometrico-cinematico previsto per una superficie sviluppabile con la sola condizione che la curva di trasporto T (pag 2 FIG.3) sia una porzione compresa tra P eP_1 di una geodetica di Λ.
Nel caso particolare di una sfera le geodetiche sono tutti i paralleli e tutti i meridiani (usando una terminologia tipicamente geografica)

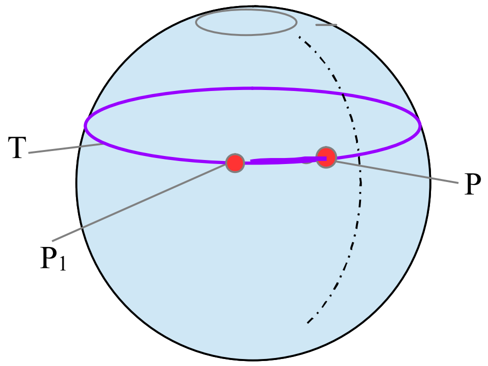
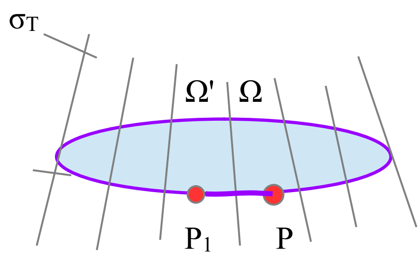


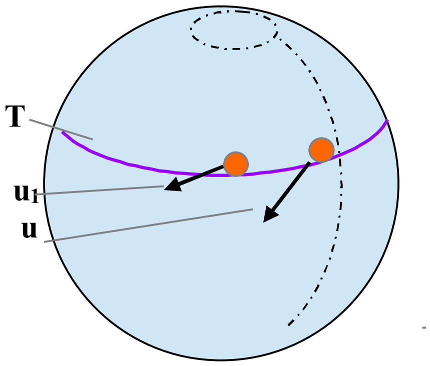
FIG.6

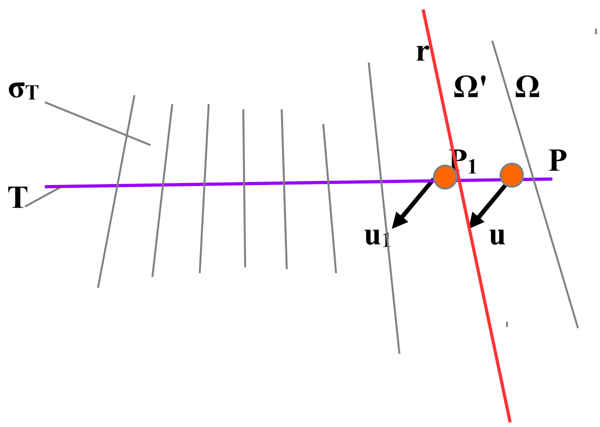


L'arco di geodetica PP_1 assuma valore infinitesimo (PP_1= dP); in tali condizioni dP risulterà assimilabile ad un segmento rettilineo (a meno di differenziali di II ordine) e le superfici Ω ed Ω' saranno assimilabili ad un piano a meno di infinitesimi di II ordine rispetto alla grandezze in gioco.

Si consideri la curva T (curva di trasporto) giacente sulla superficie sferica comprendente P P_1 e si costruisca la sviluppabile rigata lungo T (FIG.6); sia essa σ_T.
σ_T è tangente alla superficie sferica lungo T e, quindi anche lungo P e P_1 che giacciono su T

FIG.7





Un generico vettore **u** da P e tangente alla superficie sferica risulterà tangente a σ_T.

Si è ora in grado di procedere come per una superficie sviluppabile trasportando parallelamente a se stesso **u** da P a P_1 sul piano di sviluppo, poi dal piano di sviluppo alla σ_T e da questa alla T sulla sfera.

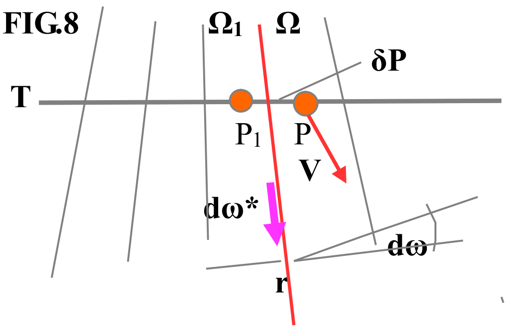
Quindi, citando testualmente Levi Civita in "Lezioni di calcolo differenziale assoluto":
conveniamo di chiamare parallela a P_1 ad una direzione generica superficiale ***u*** *in P lungo l linea T, la direzione superficiale* $\boldsymbol{u_1}$ *che sulla sviluppabile σ_T è parallela* ***a u*** *nel senso poc'anzi definito* **(**cioè sul piano di sviluppo della sviluppabile)

5) FORMA DIFFERNZIALE DEL TRASPORTO PARALLELO (differential form of parallel transport)

E' a questo punto necessario dotare di un supporto matematico le nozioni prettamente geometriche sino ad ora descritte,

Si riduca ad un tratto infinitesimo dP l'arco di geodetica compreso tra P e P_1. e si imponga una rotazione attorno alla retta r (FIG.7+ FIG.8) della superficie contenente P rispetto a quella contenente P_1

FIG.8



In ordine al valore differenziale di $PP_1 = \delta P$ la larghezza delle superfici Ω ed Ω_1 è ds e l'angolo di rotazione attorno ad r è $d\omega$

Il vettore rappresentante la rotazione di Ω sia $d\boldsymbol{\omega}^*$ avente direzione parallela ad r

Durante la rotazione di Ω il vettore **V** associato a P è tangente sia ad Ω che alla superficie sferica (in quanto l'intera sviluppabile σ_T è tangente alla sfera) subirà una variazione generata dal prodotto vettoriale di **V** e di $d\boldsymbol{\omega}^*$**.**

Tale variazione sia **dV** e quindi **V** trasportato da P a P_1 diverrà:

$$\mathbf{V_1} = \mathbf{V} + \mathbf{dV} \qquad (5.1)$$

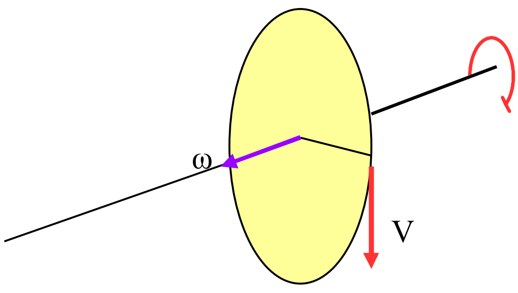
dove

$$\mathbf{dV} = \mathbf{V} \wedge d\boldsymbol{\omega}^* \qquad (5.2)$$

è normale al piano Ω su cui si trova **V** ed anche il vettore $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}^*$ appartenente sia ad Ω che ad Ω_1

Allo scopo di fornire una evidenza geometrica alla (5.2) si immagini un punto P ruotante con velocità angolare ω di una circonferenza di raggio R. L'asse di rotazione sia la normale al piano del cerchio passante per il suo centro (FIG.9)

FIG.9



V = ωR derivando dV = dω R dove, nel caso di (FIG. 8) $R = \frac{PP'}{2}$ dω risulta normale a PP' e quindi il prodotto scalare d**V.** δ**P** = 0 (ovvero la proiezione di ω su R con riferimento a FIG.9 si riduce ad un punto privo di dimensione).

Siano dV_i (i = 1,2,3) le componenti cartesiane del vettore dV ovvero:

$$dV = dV_x + dV_y + dV_z$$

e δP_i (i= 1,2,3) quelle del vettore δP ovvero

$$\delta P = \delta P_x + \delta P_y + \delta P_z$$

La d**V.δ**P = 0 in coordinate cartesiane diviene:

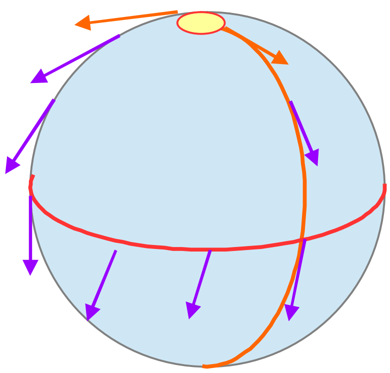
$$dV_x.\delta P_x + dV_y.\delta P_y + dV_z.\delta P_z = 0$$

Equazione simbolica dello spostamento parallelo.

6) SPOSTAMENTO PARALLELO E RELATIVITA' GENERALE

La (5.1) e la (5.2) mostrano come lo spostamento parallelo differenziale di un vettore lungo una geodetica di una superficie curva non rigata comporti la modifica dello stesso. Estendendo tale spostamento ad una curva piana chiusa composta da tratti di geodetiche, il vettore ritorna alla posizione di partenza ruotato di un angolo funzione della curva di trasporto ma anche (fenomeno rilevante) della curvatura della superficie.

L'angolo tra posizione iniziale e posizione finale può essere adottato come misura della curvatura dell'area di superficie racchiusa dalla curva chiusa.



E' nozione comune, derivata dalla Relatività Generale di Albert Einstein, come massa-energia determinino una curvatura della spaziotempo di Minkowskj ed è, conseguentemente, essenziale