

Deduzione dell'equazione della relatività generale di Einstein

a cura di Paolo Malberti
p.malberti@tiscali.it

Altro diletto che imparar non trovo.
(F. Petrarca)

Sommario

Come Einstein ha dedotto l'equazione della relatività generale ?

$$(0) \quad R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

Quale è il significato dei termini che in essa compaiono? Quale è il dato e quale è l'incognita?

La deduzione di questa equazione poggia su analogie con la fisica classica e su geniali intuizioni di Einstein. L'analogia di base è con l'equazione del campo gravitazionale di Newton, nella quale la distribuzione della densità di massa determina il potenziale gravitazionale. Nell'equazione di Einstein invece la distribuzione della densità di massa ed energia (tra loro equivalenti) determina la curvatura dello spazio-tempo. Per Newton quindi l'incognita è il potenziale gravitazionale; per Einstein l'incognita è la curvatura (in termini matematici: il "tensore metrico") dello spazio-tempo. Per entrambi la soluzione della corrispondente equazione consente di determinare la traiettoria di una particella immersa nel campo gravitazionale. Le due soluzioni sono congruenti poiché Einstein costruisce la propria teoria in modo tale che, nel limite relativistico (quando le velocità degli oggetti in moto è trascurabile rispetto alla velocità della luce) e lontano da ogni concentrazione di massa o energia, la soluzione relativistica coincida in prima approssimazione con quella classica.

Questo articolo è rivolto a chi dispone di nozioni base del formalismo matematico della fisica classica (calcolo differenziale, calcolo vettoriale, potenziale, ecc.) e di nozioni elementari della teoria della relatività ristretta (spazio-tempo, velocità cronotopica, equivalenza massa-energia, ecc.), ma non necessariamente dell'algebra tensoriale né della geometria differenziale delle superfici. Queste nozioni supplementari, essenziali per la teoria della relatività generale, vengono sinteticamente fornite nelle appendici.

Indice

1. Teoria della gravitazione secondo Newton
2. Teoria della gravitazione secondo Einstein
3. Il limite relativistico
4. Il tensore densità di energia
5. Il tensore di Einstein
6. Forma alternativa dell'equazione di Einstein
7. Determinazione della costante di proporzionalità k

Appendici

- A Esempio della teoria della gravitazione secondo Newton
- B Contro varianza, covarianza e tensori
- C Deduzione dell'equazione della geodetica
- D Legge di conservazione del tensore densità di energia
- E Derivata covariante e trasporto parallelo
- F Curvatura e tensore di Riemann
- G Derivata covariante del tensore di Ricci
- H Forma alternativa dell'equazione di Einstein
- I Equivalenza nel limite relativistico delle equazioni del moto
- L Equivalenza nel limite relativistico delle equazioni del campo
- M Esempio della teoria della gravitazione secondo Einstein

1. Teoria della gravitazione secondo Newton

Consideriamo una particella immersa nel campo di potenziale gravitazionale $\Phi = \Phi(\vec{x})$ generato da una densità di massa ρ . Secondo la teoria della gravitazione di Newton il potenziale gravitazionale soddisfa l'equazione $\text{div grad } \Phi = -4\pi G \rho$, che in coordinate cartesiane diventa:

$$(1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = -4\pi G \rho$$

dove $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ è la costante newtoniana di gravitazione.

Nella eq.1 - detta: *equazione del campo gravitazionale di Newton* - il dato è la densità di massa ρ , mentre l'incognita è il potenziale gravitazionale Φ .

Dopo aver risolto la eq.1 (cfr. Appendice A per un elementare esempio) si può procedere alla determinazione della traiettoria di una particella sonda (di massa trascurabile rispetto alla massa che genera il campo) immersa nel campo gravitazionale, tramite l'equazione (vettoriale) del moto:

$$(2) \quad \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} + \text{grad } \Phi = 0$$

nella quale il dato è il potenziale gravitazionale Φ , mentre l'incognita sono le coordinate spaziali \vec{x} della particella. Alla eq.2 - detta: *equazione del moto classico* - corrispondono tre equazioni nelle tre coordinate spaziali. Ad esempio, in coordinate cartesiane:

$$\frac{d^2}{dt^2} [x, y, z] = - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]$$

Risolvendo queste tre equazioni si ottiene la traiettoria $\vec{x} = [x(t), y(t), z(t)]$ del moto classico della particella.

2. Teoria della gravitazione secondo Einstein

Secondo Einstein la forza di attrazione gravitazionale non esiste. Al suo posto Einstein postula l'esistenza di una "curvatura" dello spazio-tempo ad opera della densità di massa ed energia (tra loro equivalenti: $E = mc^2$).

Questo postulato può essere giustificato come segue. Innanzitutto per tutti i corpi è verificata sperimentalmente la equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale. Ma anche la luce è dotata di massa inerziale (come testimoniano il vettore di Pointing e la pressione di radiazione elettromagnetica).

Di conseguenza anche ogni quanto di luce è dotato di "massa gravitazionale" e, come tale, quando attraversa un campo gravitazionale subisce una deflessione. Ma secondo il principio di Fermat in uno spazio euclideo la luce si muove lungo una linea retta. Quindi, se in un campo gravitazionale la luce viene deflessa, lo spazio in cui è presente il campo gravitazionale non è più euclideo bensì "curvo".

Per descrivere uno spazio "curvo" bisogna ricorrere alla geometria differenziale che fa uso dei cosiddetti "tensori" i quali, a prima vista, sembrano vettori e matrici con strani indici posti "in alto" o "in basso" (cfr. Appendice B). In realtà ciò che contraddistingue un tensore è il suo modo lineare di trasformarsi in seguito ad una trasformazione di coordinate. Dato che le leggi della fisica, secondo il principio della relatività generale, devono avere la medesima forma in qualsiasi sistema di riferimento (affinché tutti i sistemi di riferimento risultino equivalenti), se una legge fisica espressa, ad esempio, dall'equazione $L^{j k \dots} = 0$, dove $L^{j k \dots}$ è un tensore con più indici, tale legge, grazie alla linearità di trasformazione del tensore che la rappresenta, mantiene la medesima forma in qualsiasi altro sistema di riferimento. In questo sta l'importanza dei tensori nella teoria della relatività.

La curvatura dello spazio-tempo è caratterizzata dal tensore metrico g_{ij} , che dipende da quattro coordinate spazio-temporali, ad esempio, in un sistema di coordinate cartesiano:

$$x^1 = x; \quad x^2 = y; \quad x^3 = z; \quad x^4 = ct$$

(dove c è la velocità della luce) e che definisce la geometria dello spazio-tempo a livello infinitesimo tramite il cosiddetto “elemento di linea”:

$$(3) \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

 NOTA Ogni indice ripetuto sottintende la presenza di una sommatoria:

$$g_{ij} dx^i dx^j \equiv \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 g_{ij} dx^i dx^j .$$

Nella sommatoria ogni indice muto (ad un indice su cui si somma ad esaurimento si può attribuire una lettera qualsiasi) compare in posizione controvariante “in alto” e covariante “in basso” (cfr. appendice B)

 Se lo spazio-tempo non fosse curvo, l'elemento di linea sarebbe semplicemente (teorema di Pitagora) il quadrato della “iper-ipotenusa” del volume infinitesimo $dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$. In uno spazio curvo, invece, compaiono anche i termini misti g_{ij} con $i \neq j$.

Il problema della teoria della relatività generale consiste quindi nel determinare innanzitutto il tensore metrico g_{ij} a partire dalla distribuzione della materia-energia che (come vedremo) è rappresentata dal tensore “densità di energia” T_{ij} .

Einstein sostituisce quindi la eq. (1) di Newton con la (per il momento misteriosa) equazione:

$$(4) \quad R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

dove il tensore T_{ij} è il dato, mentre l'incognita è il tensore metrico g_{ij} (infatti sia il tensore di Ricci G_{ij} sia la sua “contrazione” R , sono funzioni del tensore metrico e delle sue derivate).

 NOTA L'equazione (4) è scritta in forma covariante (indici in basso). Moltiplicando per $g^{im} g^{in}$ (cfr. Appendice B), e cambiando in mn il nome degli indici muti

$$g^{im} g^{in} (R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R) = g^{im} g^{in} \frac{8\pi G}{c^4} T_{mn}$$

si ottiene la corrispondente equazione in forma controvariante (indici in alto):

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ij}$$

 Alla eq.4 – detta: equazione del campo gravitazionale di Einstein - corrispondono sedici equazioni, una per ogni coppia di indici (ij) . Solo dieci però sono le equazioni indipendenti, grazie alla simmetria dei tensori in gioco rispetto alla coppia di indici (ij) .

Dopo aver risolto l'eq.4, ottenendo così il tensore metrico g_{ij} , è possibile calcolare la traiettoria di una particella “sonda” (ossia di massa trascurabile rispetto all'energia che curva lo spazio-tempo). Secondo la gravitazione di Einstein, infatti, ogni massa non soggetta a vincoli segue una traiettoria geodetica (di lunghezza quadri-dimensionale minima) determinata dal tensore metrico. La particella si muove nello spazio-tempo lungo una geodetica, esattamente come nella meccanica classica una

particella non sottoposta a forze esterne (o meglio, con risultante nulla delle forze esterne che su di essa agiscono) si muove lungo una linea retta.

Einstein sostituisce quindi l'eq. (2) di Newton con la *equazione della geodetica* (cfr. Appendice C):

$$(5) \quad \frac{d^2 x^m}{ds^2} + \Gamma_{ij}^m \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0$$

dove Γ_{ij}^m sono i simboli di Christoffel (funzioni anch'esse del tensore metrico g_{ij} e delle sue derivate):

$$(6) \quad \Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{km} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right]$$

Il parametro $s = c\tau$ è proporzionale (a meno della costante c) al tempo proprio τ , ossia al tempo dell'orologio di un osservatore posto in un sistema di riferimento solidale con la particella sonda.

Alla eq.5 - detta: *equazione del moto relativistico* - corrispondono quattro equazioni nelle quattro coordinate x^m . Risolvendo queste quattro equazioni, ad esempio, in un sistema di riferimento cartesiano nelle quattro incognite (x, y, z, t) , si ottiene la traiettoria $\bar{x} = [x(t), y(t), z(t)]$ della particella.

3. Il limite relativistico

Affinché la teoria di Einstein non contraddica quella di Newton, le equazioni della fisica relativistica (4) e (5) devono ridursi alle equazioni (1) e (2) della fisica classica nel cosiddetto "limite relativistico", quando la particella si muove con velocità trascurabile rispetto alla velocità della luce lontano da masse che curvano lo spazio-tempo, ossia quando:

a. la velocità della particella è trascurabile rispetto alla velocità della luce:

$$v \ll c$$

b. la regione dello spazio-tempo in cui si trova la particella sonda è quasi "piatto", cosicché il tensore metrico g_{ij} approssima il tensore metrico Minkowskiano η_{ij} della relatività ristretta:

$$g_{ij} \approx \eta_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c. il tensore metrico g_{ij} è statico nel tempo:

$$\frac{\partial}{\partial x^4} g_{ij} = 0$$

4. Il tensore densità di energia

Quale grandezza fisica sostituirà nella nuova teoria relativistica la densità di massa della teoria classica di Newton?

Consideriamo una "polvere di particelle" di densità ρ che si muove con velocità costante

$$u^i = \frac{dx^i}{dt} = [u^x \quad u^y \quad u^z] \text{ rispetto ad un determinato, anche se arbitrario, sistema inerziale di}$$

riferimento S. Secondo la relatività speciale ad una massa infinitesima $\Delta m = \rho \Delta V$ di questa polvere racchiusa nel volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ è associata l'energia $\Delta E = \Delta(m c^2) = (\Delta m_0) \gamma c^2$, dove $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ e $\Delta m_0 = \rho_0 \Delta V_0$ è la medesima massa "vista" da un sistema di riferimento S_0 solidale con essa.

In seguito alla contrazione relativistica delle lunghezze risulta $\Delta V_0 = \gamma \Delta V$, cosicché:

$$\rho \Delta V c^2 = \rho_0 \Delta V_0 \gamma c^2 = \rho_0 \Delta V \gamma \gamma c^2$$

da cui:

$$\rho c^2 = \rho_0 \gamma \gamma c^2 = \rho_0 (\gamma c)(\gamma c) = \rho_0 U^4 U^4$$

dove $U^4 = \gamma c$ è la quarta componente della velocità cronotopica

$$(7) \quad U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} = [\gamma u^x \quad \gamma u^y \quad \gamma u^z \quad \gamma c]$$

della polvere di particelle.

Einstein (con un colpo di genio) identifica la densità di energia $\rho c^2 = \rho_0 U^4 U^4$ con la componente puramente temporale ($i=4, j=4$) del "tensore densità di energia" T^{ij} associato alla polvere di particelle:

$$(8) \quad T^{44} \equiv \rho_0 U^4 U^4$$

ed estende questa definizione in maniera analoga a tutte le altre componenti del tensore

$$T^{ij} \equiv \rho_0 U^i U^j$$

 NOTA: il tensore controvariante (indici in alto) T^{ij} è diverso dal suo omologo covariante (indici in basso) T_{ij} poiché

$T^{ij} = g^{ik} g^{jm} T_{km}$ (cfr. Appendice B). Il tensore densità di energia viene definito in forma controvariante (eq.8) poiché controvariante è la definizione (eq.7) della velocità cronotopica.

La legge di conservazione del tensore densità di energia (cfr. appendice E) è espressa tramite l'annullamento della sua derivata covariante $T_{;i}^{ij}$ (cfr. appendice F):

$$(9) \quad T_{;i}^{ij} = T_{;i}^{ij} + \Gamma_{qk}^i T^{qj} + \Gamma_{ip}^j T^{ip} = 0$$

Questa equazione è essenziale per determinare la struttura del termine a sinistra della eq.4, il cosiddetto "tensore di Einstein".

5. Il tensore di Einstein

Einstein (con un altro colpo di genio) sostituisce il termine a destra dell'eq.1 di Newton, che è proporzionale alla densità di massa ρ , con un termine $k T^{ij}$ proporzionale al tensore densità di energia, dove k è una opportuna costante di proporzionalità (ancora da determinare).

Dato che T^{ij} è un tensore di rango due, anche il termine a sinistra dell'equazione di Einstein deve essere un tensore di rango due. Abbiamo così il primo abbozzo dell'equazione del campo gravitazionale:

$$(10) \quad G^{ij} = k T^{ij}$$

dove G^{ij} è il "tensore di Einstein".

L'idea fondamentale della relatività generale è che la densità di energia determini localmente la curvatura dello spazio-tempo. Poiché il tensore di Riemann R^m_{ijk} :

$$R^m_{ijk} \equiv \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^r_{ik} \Gamma^m_{rj} - \Gamma^r_{ij} \Gamma^m_{rk}$$

rappresenta in qualche modo la curvatura locale di una superficie a più dimensioni (cfr. Appendice G), è ragionevole supporre che il tensore di Einstein sia una funzione del tensore di Riemann. Come primo approccio, quindi, cerchiamo di esprimere il tensore di Einstein tramite il tensore di Riemann. Osserviamo innanzitutto che il tensore di Riemann è di rango quattro mentre il tensore di Einstein è di rango due. Si potrebbe quindi contrarre il tensore di Riemann per ridurre il numero dei suoi indici a due. Un candidato per questa operazione è il tensore di Ricci R_{ij} , che si ottiene dalla contrazione del tensore di Riemann sul primo e terzo indice:

$$(11) \quad R_{ij} \equiv R^k_{ikj}$$

Essendo T_{ij} simmetrico, anche G_{ij} deve esserlo. Così è infatti, poiché grazie ad una delle numerose simmetrie del tensore di Riemann (cfr. appendice F, eq.F5) :

$$(12) \quad R_{ij} = R^k_{ikj} = g^{kn} R_{nikj} = g^{nk} R_{kjni} = R^n_{inj} = R_{ji}$$

Contraendo il tensore di Ricci si ottiene il cosiddetto “scalare della curvatura” R :

$$(13) \quad R \equiv g^{ij} R_{ij} = R^i_i$$

In base alla legge di conservazione del tensore T^{ij} , la sua derivata covariante $T^{ij}_{;i}$ deve essere nulla (cfr. eq.9). Questo implica che nulla sia anche la derivata covariante di G^{ij} .

Qui però sorge un problema, poiché si dimostra (cfr. appendice G) che la derivata covariante $R^i_{;i}$ del tensore di Ricci non è in generale nulla, infatti:

$$(14) \quad R^i_{;i} = \frac{1}{2} g^{ij} R_{;i}$$

Quindi identificare il tensore di Einstein G^{ij} semplicemente con il tensore di Ricci R^{ij} non basta. Bisogna correggere opportunamente il tensore di Ricci per rendere nulla la sua derivata covariante. Ad esempio, se poniamo:

$$(15) \quad G^{ij} \equiv R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R$$

risulta:

$$G^i_{;i} = (R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R)_{;i} = R^i_{;i} - \frac{1}{2} g^i_{;i} R - \frac{1}{2} g^{ij} R_{;i}$$

Ma la derivata covariante del tensore metrico è sempre nulla (cfr. Appendice E), quindi:

$$G^i_{;i} = R^i_{;i} - \frac{1}{2} g^{ij} R_{;i} = \frac{1}{2} g^{ij} R_{;i} - \frac{1}{2} g^{ij} R_{;i} = 0$$

In conclusione il tensore di Einstein è:

$$(16) \quad G^{ij} \equiv R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R$$

e l'equazione del campo gravitazionale di Einstein (in forma controvariante) è:

$$(17) \quad R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = k T^{ij}$$

A questo punto rimane solo da determinare la costante di proporzionalità k .

6. Forma alternativa dell'equazione di Einstein

Per facilitare la determinazione della costante di proporzionalità k riscriviamo l'equazione di Einstein in una forma alternativa (cfr. Appendice H), mettendo in evidenza il tensore di Ricci.

$$(18) \quad R^{ij} = k \left(T^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} T \right)$$

dove $T \equiv g_{ij} T^{ij}$ è lo scalare del tensore densità di energia.

7. Determinazione della costante k

Per determinare la costante di proporzionalità k , nel limite relativistico e in un campo gravitazionale debole, imponiamo che:

- a) l'equazione del moto relativistico si riduca all'equazione del moto classico
- b) l'equazione del campo gravitazionale di Einstein si riduca all'equazione del campo gravitazionale di Newton

7a) equivalenza delle equazioni del moto relativistico e classico

Nel limite relativistico si dimostra (cfr. Appendice I) che l'equazione del moto:

$$\frac{d^2 x^m}{ds^2} + \Gamma_{ij}^m \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0$$

si riduce a:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx \frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}$$

Dal confronto con l'equazione del moto classico:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$$

deve quindi essere:

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^i} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \\ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{44} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(- \frac{2}{c^2} \Phi \right) \\ g_{44} &= - \frac{2}{c^2} \Phi + \text{costante} \end{aligned}$$

Per determinare la costante di integrazione basta ricordare che per $r \rightarrow \infty$ il potenziale gravitazionale si annulla $\Phi(\infty) = 0$, mentre $g_{44}(\infty) = +1$ (poiché $g_{44} \approx \eta_{44} = +1$). Di conseguenza:

$$(19) \quad g_{44} = 1 - 2 \frac{\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2}{c^2} \frac{MG}{r}$$

7b) equivalenza delle equazioni del campo gravitazionale

Consideriamo la componente puramente temporale dell'equazione del campo gravitazionale di Einstein nella forma alternativa:

$$(20) \quad R^{44} = k \left(T^{44} - \frac{1}{2} g^{44} T \right)$$

Consideriamo innanzitutto il termine a sinistra della (20). Si dimostra (cfr. Appendice L) che nel limite relativistico:

$$(21) \quad R^{44} \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial z^2} \right)$$

Sostituendo la eq.19 nella eq.21 si ottiene:

$$R^{44} \approx -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi$$

Ma secondo l'eq.1 del campo gravitazionale di Newton :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = -4\pi G \rho$$

Deve quindi essere:

$$(22) \quad R^{44} \approx \frac{4\pi G \rho}{c^2}$$

Consideriamo ora il termine a destra della eq.20 . Nel limite relativistico la componente predominante del tensore densità di energia è:

$$(23) \quad T^{44} = \rho c^2$$

poiché tutte le altre componenti (per definizione $T^{ij} \equiv \rho_0 U^i U^j$) sono trascurabili. Di conseguenza lo scalare T del tensore densità di energia è:

$$(23) \quad T = g_{ij} T^{ij} = \eta_{ij} T^{ij} = \rho c^2$$

Sostituendo la (22) , (23) e (24) nella (20) si ottiene:

$$\frac{4\pi G \rho}{c^2} = k \left(\rho c^2 - \frac{1}{2} \rho c^2 \right)$$

$$\frac{4\pi G \rho}{c^2} = \frac{k}{2} \rho c^2$$

Risulta così determinato il valore della costante di proporzionalità :

$$(24) \quad k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

In conclusione dalle eq.10, eq.16 e eq.24 si ottiene la equazione della relatività generale di Einstein (in forma controvariante)

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ij}$$

a cui corrisponde in forma covariante la eq.0 (da cui siamo partiti):

$$(0) \quad R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

Appendice A

Esempio della teoria della gravitazione secondo Newton

Consideriamo il campo gravitazionale generato da una massa di densità ρ concentrata attorno l'origine degli assi. Secondo la prima equazione di Newton:

$$(A1) \quad \int_V \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi) dv = - \int_V 4\pi G \rho dv = -4\pi G \int_V \rho dv = -4\pi G M$$

In virtù del teorema della divergenza la eq.A1 diventa:

$$(A2) \quad \int_S \operatorname{grad} \Phi \cdot d\vec{\sigma} = -4\pi G M$$

dove $M = \int_V \rho dV$ è la massa del corpo che genera il potenziale gravitazionale Φ , V è un generico

volume che comprende tutta la massa nell'intorno dell'origine degli assi, ed S è la superficie che racchiude il volume V .

Data la simmetria sferica del sistema, scegliamo come volume V una sfera di raggio r centrata nell'origine. In questo caso, il vettore $\operatorname{grad}\Phi$ è costante sulla superficie S e diretto verso l'interno, mentre $d\vec{\sigma}$ (l'elemento infinitesimo di superficie) è diretto verso l'esterno, quindi :

$$(A3) \quad \int_S \operatorname{grad} \Phi \cdot d\vec{\sigma} = - |\operatorname{grad} \Phi| \int_S d\sigma = -4\pi r^2 |\operatorname{grad} \Phi|$$

Sostituiamo la A3 nella A2:

$$(A4) \quad -4\pi r^2 |\operatorname{grad} \Phi| = -4\pi G M$$

$$|\operatorname{grad} \Phi| = \frac{G M}{r^2}$$

Ma sulla superficie della sfera il potenziale Φ dipende solo dal raggio. Di conseguenza in coordinate sferiche $\vec{x} = [r, \vartheta, \varphi]$:

$$|\operatorname{grad} \Phi| = \left| \frac{d\Phi}{dr} \right|$$

e la A4 diventa:

$$(A5) \quad \frac{d\Phi}{dr} = \frac{G M}{r^2}$$

la cui soluzione è:

$$(A6) \quad \Phi(r) = -\frac{G M}{r}$$

Inseriamo la A4 nella eq. 2 del moto:

$$(2) \quad \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} + \operatorname{grad} \Phi = 0$$

e risolviamola nell'incognita $\vec{x} = [r, \vartheta, \varphi]$ rispetto al tempo t . La traiettoria $\vec{x} = \vec{x}(t)$ dipende anche dalle condizioni iniziali (posizione e velocità) della particella.

Consideriamo il caso più semplice, quando la particella si muove su una traiettoria circolare di raggio R attorno alla massa M e, per semplificare ulteriormente, scegliamo il sistema di riferimento in modo tale che la traiettoria giaccia nel piano $\vartheta = 0$.

In questo caso il vettore \vec{x} delle coordinate è il raggio, costante nel modulo $|\vec{x}| = R$ ma non nella direzione. L'equazione vettoriale del moto è:

$$(A7) \quad \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} \Big|_{r=R} = -\operatorname{grad} \Phi \Big|_{r=R} = - \begin{bmatrix} \frac{G M}{R^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove il simbolo $\Big|_{r=R}$ significa “calcolato nel punto $r = R$ ”.

Indicando con $\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} \quad \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right]$ la accelerazione, la A7 diventa:

$$(A8) \quad \vec{a} = [a_r \quad a_\vartheta \quad a_\varphi] = \left[-\frac{GM}{R^2} \quad 0 \quad 0 \right]$$

Dalla A8 si deduce che la particella, a causa della forza di attrazione gravitazionale, è sottoposta ad una accelerazione radiale a_r centripeta:

$$(A9) \quad a_r = -\frac{GM}{R^2}$$

nella medesima direzione del raggio ma di verso opposto, e ad una accelerazione angolare a_φ nulla. La velocità angolare è quindi costante:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

e costante è anche la velocità lineare:

$$v = \omega R$$

Un osservatore solidale con la particella in moto, se non fosse agganciato alla particella, partirebbe per la tangente. Questa sollecitazione ad uscire dalla traiettoria circolare viene da lui percepita come una forza che lo allontana dal centro, ossia come una forza centrifuga.

La forza centrifuga è quindi una forza apparente, non nel senso che sembra una forza e non lo è, ma nel senso che appare (e non è dovuta all'interazione con altri corpi) in quanto il sistema di riferimento solidale con la particella non è inerziale bensì accelerato.

In base al secondo principio della dinamica $F \Delta t = \Delta p$ una particella che si muove con velocità costante su una traiettoria circolare di raggio R può farlo se sottoposta ad una accelerazione:

$$(A10) \quad a_c = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

Questa è l'accelerazione “centrifuga apparente” che l'osservatore solidale con la particella sperimenta. Affinché la particella rimanga sulla traiettoria circolare deve essere:

$$a_c + a_r = 0$$

ossia:

$$(A11) \quad \frac{v^2}{R} - \frac{GM}{R^2} = 0$$

Appendice B

Sistemi di riferimento controvariante e covariante

Consideriamo tre linee curve q^1, q^2 e q^3 (dette: *curve coordinate*) che si incrociano in un punto P. In questo punto costruiamo un sistema di riferimento tramite i tre vettori base (versori) \vec{e}^i tangenti alle curve coordinate.

Anche se in generale gli \vec{e}^i non sono ortogonali fra di loro, ogni coppia di \vec{e}^i determina un piano, detto piano coordinato. Nel medesimo punto P consideriamo i tre vettori base \vec{e}_j perpendicolari ai piani coordinati.

Abbiamo così tre coppie di versori \vec{e}^i (controvarianti: indice in alto) ed \vec{e}_j (covarianti: indice in basso).

In generale gli \vec{e}^i non sono ortogonali fra di loro, e così pure gli \vec{e}_j . Tuttavia ogni \vec{e}^i è ortogonale ai due \vec{e}_j che individuano il suo piano coordinato, cosicché il prodotto scalare:

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = 0 \text{ quando } i \neq j$$

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j \neq 0 \text{ quando } i = j$$

Facciamo in modo che i versori covarianti \vec{e}_i siano reciproci con i versori controvarianti \vec{e}^i , ossia che si abbia:

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = 1 \text{ quando } i = j$$

Con questo accorgimento:

$$\vec{e}^j \cdot \vec{e}_k = \vec{e}_k \cdot \vec{e}^j = \delta_j^k \text{ (delta di Kronecker).}$$

Tensore metrico

Poniamo per definizione:

$$g_{jk} \equiv \vec{e}^j \cdot \vec{e}^k$$

Vedremo in seguito che g_{jk} non è una semplice matrice, bensì un tensore: il cosiddetto *tensore metrico* covariante. Analogamente definiamo il tensore metrico controvariante:

$$g^{jk} \equiv \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k$$

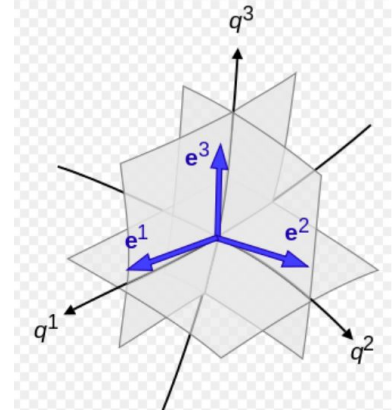
Essendo il prodotto scalare di due vettori simmetrico, anche g^{jk} e g_{jk} sono simmetrici:

$$g^{jk} = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \vec{e}_k \cdot \vec{e}_j = g^{kj}$$

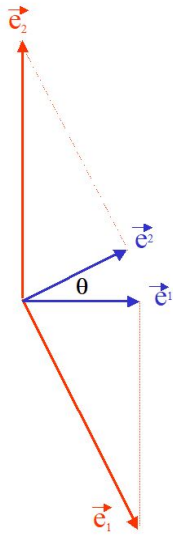
Infine, dato che g^{jk} è la matrice inversa di g_{jk} :

$$g^{jk} g_{ki} = \delta_i^j$$

$$g^{jk} g_{kj} = \delta_j^j = 4$$



Esempio: *coordinate piane*



In due dimensioni, siano \vec{e}^1 e \vec{e}^2 due vettori base controvarianti di modulo unitario $|\vec{e}^1| = |\vec{e}^2| = 1$, inclinati secondo un angolo θ .

I vettori base covarianti sono: \vec{e}_1 ortogonale ad \vec{e}^2 , ed \vec{e}_2 ortogonale ad \vec{e}^1 . Affinché i covettori e controvarianti base siano fra loro reciproci imponiamo che sia:

$$1 = \vec{e}^1 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{e}^1| |\vec{e}_1| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = |\vec{e}^1| |\vec{e}_1| \sin \theta$$

ossia:

$$|\vec{e}_1| = \frac{1}{|\vec{e}^1| \cdot \sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}. \text{ Lo stesso vale per } |\vec{e}_2| = \frac{1}{\sin \theta}.$$

NOTA Senza la condizione di reciprocità le unità di misura (ossia i moduli dei versori) degli assi covarianti sarebbero diverse da quelle degli assi controvarianti

Il tensore metrico covariante è:

$$g_{jk} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 1 \end{bmatrix}$$

Essendo $\pi - \theta$ l'angolo tra \vec{e}_1 ed \vec{e}_2 il loro prodotto scalare misto è:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \cos(\pi - \theta) = \frac{-\cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

Il tensore metrico controvariante è quindi:

$$g^{jk} = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sin^2 \theta} & \frac{-\cos \theta}{\sin^2 \theta} \\ \frac{-\cos \theta}{\sin^2 \theta} & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{bmatrix}$$

Significato geometrico delle componenti controvarianti e covarianti

Un generico vettore \vec{V} può essere rappresentato tramite le sue proiezioni parallele in entrambi i sistemi di riferimento (covariante e controvariante).

Nel sistema di riferimento controvariante

individuato dai versori \vec{e}^i :

$$\vec{V} = v^1 \vec{e}^1 + v^2 \vec{e}^2 = v^i \vec{e}^i$$

e nel sistema di riferimento covariante

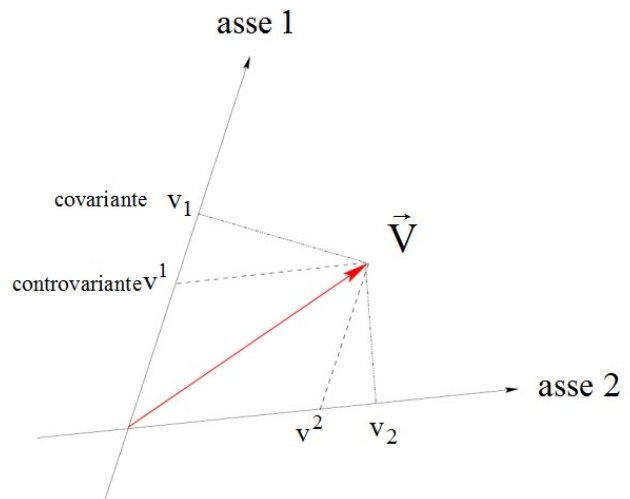
individuato dai versori \vec{e}_i :

$$\vec{V} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 = v_i \vec{e}_i$$

Dato che:

$$\vec{V} \cdot \vec{e}^k = v_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}^k = v_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}^k = v_i \delta_i^k = v_k$$

la componente covariante v_k è la proiezione ortogonale del vettore \vec{V} sull'asse individuato dal versore \vec{e}^k .



La notazione controvariante (indici in alto) e covariante (indici in basso) facilita la descrizione della geometria dello spazio poiché tiene conto implicitamente dell'angolo tra i due assi di riferimento. E' evidente che in un sistema di assi cartesiani, per definizione ortogonali, le componenti covarianti e controvarianti coincidono; ma in uno spazio curvo gli assi di riferimento sono in generale fra di loro obliqui. Quindi per evitare di tener conto di questo angolo, che appesantirebbe e complicherebbe la notazione con espressioni trigonometriche, conviene utilizzare le componenti covarianti (proiezione ortogonale) e controvarianti (proiezione parallela).

Innalzamento e abbassamento degli indici

Quale è la relazione tra le componenti controvarianti v^i e covarianti v_i di un generico vettore \vec{V} ?

Dato che:

$$\vec{V} \cdot \vec{e}_k = v_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = v_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = v_i g^{ik}$$

$$\vec{V} \cdot \vec{e}_k = v^j \vec{e}^j \cdot \vec{e}_k = v^j \vec{e}^j \cdot \vec{e}_k = v^j \delta_j^k = v^k$$

Quindi le regole per "alzare" o "abbassare" gli indici sono:

$$v^k = v_i g^{ik}$$

$$v_k = v^j g_{jk}$$

Analogamente la regola per alzare, ad esempio, gli indici di un tensore controvariante T_{km} di rango due e trasformarlo in un tensore covariante T^{ij} è:

$$T^{ij} = g^{ik} g^{jm} T_{km}$$

Definizione di tensore

Passiamo dalle coordinate x^j del sistema di riferimento S alle coordinate \tilde{x}^j del sistema di riferimento \tilde{S} tramite la trasformazione:

$$\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, x^2, x^3)$$

a cui corrisponde la trasformazione inversa:

$$x^j = x^j(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$$

In generale in seguito alla trasformazione le componenti covarianti e controvarianti di un vettore e i vettori base covarianti e controvarianti cambiano espressione. Un generico vettore \vec{V} viene promosso a tensore se le sue componenti covarianti e controvarianti si trasformano nel seguente modo:

$$\tilde{v}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} v^k$$

$$\tilde{v}_j = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^k} v_k$$

Queste trasformazioni sono necessarie e sufficienti affinché i due vettori, visti rispettivamente dai due sistemi di riferimento S ed \tilde{S} , siano uguali: $\vec{V} = \tilde{\vec{V}}$. Un tensore di rango uno è quindi un vettore la cui direzione, modulo e verso rimane inalterato in qualsiasi sistema di riferimento.

Un tensore di rango due, ad esempio il tensore metrico, si trasforma nel seguente modo:

$$\tilde{g}^{jk} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^t} g^{st}$$

$$\tilde{g}_{jk} = \frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^t}{\partial \tilde{x}^k} g_{st}$$

Tensori e leggi della fisica

Ciò che contraddistingue un tensore da una semplice matrice è il particolare modo lineare di trasformarsi in seguito ad una trasformazione di coordinate. Le leggi della fisica, secondo il principio della relatività generale, devono avere la medesima forma in tutti i sistemi di riferimento. Se una legge fisica è espressa dall'equazione $T^{jk\dots} = 0$, dove $T^{jk\dots}$ è un tensore con più indici, allora tale legge sarà la stessa in tutti i sistemi di riferimento. Per questo motivo, ogni legge fisica, affinché soddisfi il principio di relatività generale, deve essere posta nella forma tensoriale $T^{jk\dots} = 0$.

Appendice C

Deduzione dell'equazione della geodetica

Dato l'elemento infinitesimo di linea $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, la curva geodetica $x^m = x^m(s)$ tra i punti S_1 e

S_2 è quella che rende minimo l'integrale $\int_{S_1}^{S_2} ds$, ossia quella che soddisfa l'equazione:

$$(C1) \quad \delta \int_{S_1}^{S_2} ds = 0$$

Dato che:

$$1 = \frac{ds^2}{ds^2} = g_{i,j} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}$$

la (C1) può essere così riscritta:

$$\delta \int_{S_1}^{S_2} 1 \cdot ds = \delta \int_{S_1}^{S_2} g_{i,j} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \cdot ds = \delta \int_{S_1}^{S_2} F(s) ds = 0$$

dove $F[x^k(s), \dot{x}^k(s)] = \sum_{i,j} g_{i,j} \dot{x}^i \dot{x}^j$ e $\dot{x}^k(s) = \frac{dx^k(s)}{ds}$.

Secondo il calcolo variazionale, la soluzione di questo problema (simile a quello della minima azione in meccanica classica) è data dalle equazioni di Eulero:

$$(C2) \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial F}{\partial x^k} = 0$$

La (C2) diventa:

$$\frac{d}{ds} (2 g_{ik} \dot{x}^i) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

$$g_{i,m} \ddot{x}^i + \frac{\partial g_{i,m}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^m} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

Scambiamo gli indici i e j nel termine di mezzo

$$g_{ik} \ddot{x}^i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

e moltiplichiamo per g^{mk}

$$\ddot{x}^m + \frac{1}{2} g^{mk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

Otteniamo così l'equazione della geodetica:

$$\frac{d^2 x^m}{ds^2} + \Gamma_{ij}^m \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0$$

dove $\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{mk} \left[\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right]$

Appendice D

Legge di conservazione del tensore densità di energia

Per semplificare la deduzione della legge di conservazione del tensore T^{ij} , consideriamo un volume infinitesimo $\Delta x \Delta y \Delta z$ nel punto (x, y, z) e supponiamo che la polvere si muova con velocità costante $\begin{bmatrix} u^x & 0 & 0 \end{bmatrix}$ a cui corrisponde la velocità cronotopica

$$U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} = [\gamma u^x \quad 0 \quad 0 \quad \gamma c]$$

Dato che:

$$T^{44} u^x = \rho_0 U^4 U^4 u^x = \rho_0 \gamma c \gamma c u^x = c(\rho_0 \gamma c \gamma u^x) = c T^{41}$$

$$T^{44} u^x dt \Delta y \Delta z = c T^{41} dt \Delta y \Delta z$$

il flusso di densità di energia in entrata attraverso l'area $\Delta y \Delta z$ al punto (x, y, z) è:

$$dE_x = T^{44} dx \Delta y \Delta z = c T_x^{41} dt \Delta y \Delta z$$

ed il flusso di densità di energia in uscita attraverso l'area $\Delta y \Delta z$ al punto $(x + \Delta x, y, z)$ è:

$$dE_{x+\Delta x} = c T_{x+\Delta x}^{41} dt \Delta y \Delta z$$

La variazione netta dE di densità di energia nel tempo dt dentro il volume $\Delta y \Delta z \Delta x$ è quindi:

$$dE = dE_x - dE_{x+\Delta x} = c \frac{\Delta T^{41}}{\Delta x} dt \Delta y \Delta z \Delta x$$

Imponendo la legge di conservazione dell'energia $dE = 0$ abbiamo:

$$\frac{\partial T^{41}}{\partial x} = 0$$

Per una generica velocità $\begin{bmatrix} u^x & u^y & u^z \end{bmatrix}$ della polvere risulta:

$$\frac{\partial T^{4x}}{\partial x} + \frac{\partial T^{4y}}{\partial y} + \frac{\partial T^{4z}}{\partial z} = 0$$

ossia:

$$\frac{\partial T^{4j}}{\partial x^j} \equiv \partial_j T^{4j} = 0$$

In maniera analoga si dimostra che questa equazione vale non solo per l'indice $i=4$ bensì per qualsiasi valore dell'indice i , quindi:

$$\partial_j T^{ij} = \partial_i T^{ij} = 0$$

grazie alla simmetria del tensore $T^{ij} = T^{ji}$.

Nel calcolo tensoriale la generalizzazione appropriata della derivata ordinaria è la derivata covariante (cfr. Appendice E), cosicché la appropriata legge di conservazione del tensore densità di energia è:

$$T_{;i}^{ij} = T_{,i}^{ij} + \Gamma_{qk}^i T^{qj} + \Gamma_{ip}^j T^{ip} = 0$$

Appendice E

Derivata ordinaria

In un arbitrario sistema di riferimento - caratterizzato dai vettori base $\bar{e}^i = \bar{e}^i(\bar{x})$ e dal tensore metrico $g_{ij}(x) = \bar{e}^i(\bar{x}) \cdot \bar{e}^j(\bar{x})$ - sia $\bar{V}(\bar{x})$ un generico vettore del campo:

$$\bar{V} = V^i \bar{e}^i$$

La derivata parziale ordinaria (che indichiamo con un indice preceduto da una virgola)

$$\frac{\partial V^i}{\partial x^k} \equiv V^i_{,k}$$

non è in generale un tensore. Infatti tramite la generica trasformazione di coordinate $x \rightarrow \tilde{x}$ le componenti V^i del vettore (tensore controvariante di rango uno) si trasformano (per definizione) in:

$$\tilde{V}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m} V^m$$

Ma in generale:

$$\tilde{V}^i_{,k} \equiv \frac{\partial \tilde{V}^i}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m} V^m \right) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} (V^m) + V^m \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m} \right)$$

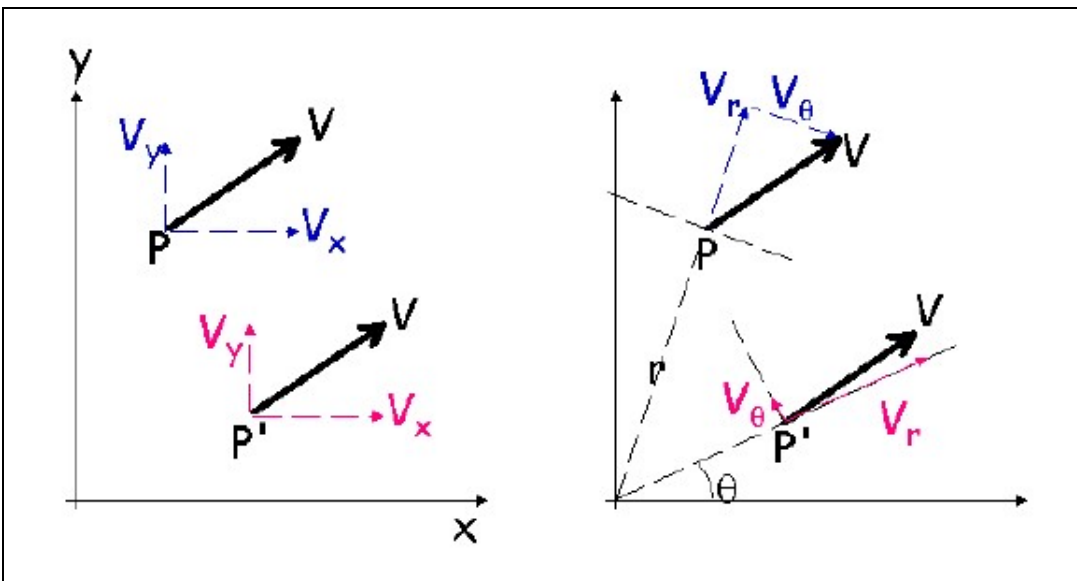
$$\tilde{V}^i_{,k} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial V^m}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^k} + V^m \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^r \partial x^m} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k}$$

Se $V^i_{,k}$ fosse un tensore dovremmo invece avere solo il primo termine a destra $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m} \left(\frac{\partial V^m}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^k} \right)$,

mentre il secondo $V^m \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^r \partial x^m} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k}$ dovrebbe essere nullo.

Il problema sta nel fatto che nel calcolare la derivata ordinaria si sottrae il vettore calcolato in un punto a quello calcolato in un punto infinitamente vicino. In generale però in punti diversi dello spazio diverso è anche l'orientamento dei vettori base.

Ad esempio, consideriamo un campo vettoriale costante nello spazio euclideo:



In coordinate cartesiane (ad esempio nel piano) le direzioni dei versori base sono costanti in qualsiasi punto, mentre in coordinate polari le direzioni dei versori base sono diverse in due punti diversi, quindi le variazioni delle componenti V^i sono diverse da zero. Ma tale variazione, che non ha significato fisico oggettivo poiché il vettore del campo è per ipotesi costante, è dovuta solo alla scelta del sistema di coordinate.

Derivata covariante

Bisogna trovare un nuovo tipo di derivata che tenga automaticamente conto della variazione dell'orientamento dei versori base. A questo scopo calcoliamo il differenziale totale $d\vec{V}$ tenendo conto che, oltre alle componenti $V^i = V^i(\vec{x})$, anche i vettori base $\vec{e}^i = \vec{e}^i(\vec{x})$ dipendono dalla posizione:

$$d\vec{V} = d(V^i \vec{e}^i) = (dV^i) \vec{e}^i + V^i (d\vec{e}^i)$$

Si dimostra che:

$$d\vec{e}^i = \Gamma_{ik}^m dx^k \vec{e}^m$$

dove Γ_{ik}^m sono i "simboli di Christoffel" (del secondo ordine):

$$\Gamma_{ik}^m = \frac{1}{2} g^{mn} \left[\frac{\partial g_{ni}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n} \right]$$

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo che $d\vec{e}^i$ sia combinazione lineare degli \vec{e}^m tramite dei coefficienti conformi alla regola delle derivate parziali di una generica funzione, ossia supponiamo che sia

$$d\vec{e}^i = \Gamma_{ik}^m dx^k \vec{e}^m$$

dove Γ_{ik}^m sono degli opportuni coefficienti da determinare. Vedremo che questi coefficienti sono proprio i simboli di Christoffel.

Moltiplichiamo scalarmente per \vec{e}^w

$$\vec{e}^w \cdot d\vec{e}^i = \Gamma_{ik}^m dx^k \vec{e}^w \cdot \vec{e}^m$$

Il termine a destra è

$$\Gamma_{ik}^m dx^k \vec{e}^w \cdot \vec{e}^m = g_{wm} \Gamma_{ik}^m dx^k$$

Il termine a sinistra è

$$\vec{e}^w \cdot d\vec{e}^i = d(g_{wi}) - \vec{e}^i \cdot d\vec{e}^w = d(g_{wi}) - g_{im} \Gamma_{wk}^m dx^k$$

quindi

$$d(g_{wi}) - g_{im} \Gamma_{wk}^m dx^k = g_{wm} \Gamma_{ik}^m dx^k$$

Differenziamo ora rispetto a x^t

$$\frac{\partial g_{wi}}{\partial x^t} = g_{im} \Gamma_{wk}^m \delta_t^k + g_{wm} \Gamma_{ik}^m \delta_t^k$$

$$\frac{\partial g_{wi}}{\partial x^t} = g_{im} \Gamma_{wt}^m + g_{wm} \Gamma_{it}^m$$

Questa espressione contiene tre indici liberi, che possiamo quindi liberamente permutare e riscrivere così:

permutazione zero $(w i t) \quad \frac{\partial g_{wi}}{\partial x^t} = g_{im} \Gamma_{wt}^m + g_{wm} \Gamma_{it}^m$

prima permutazione $(i t w) \quad \frac{\partial g_{it}}{\partial x^w} = g_{im} \Gamma_{iw}^m + g_{im} \Gamma_{tw}^m$

seconda permutazione $(t w i) \quad \frac{\partial g_{tw}}{\partial x^i} = g_{wm} \Gamma_{ti}^m + g_{tm} \Gamma_{wi}^m$

Sappiamo che i coefficienti Γ sono simmetrici negli indici inferiori

$$\Gamma_{wt}^m = \Gamma_{tw}^m$$

NOTA: naturalmente alla fine dovremo verificare che, effettivamente, così è.

Sommiamo le prime due equazioni e sottraiamo la terza:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{wi}}{\partial x^t} + \frac{\partial g_{it}}{\partial x^w} - \frac{\partial g_{tw}}{\partial x^i} &= g_{im} \Gamma_{wt}^m + g_{wm} \Gamma_{it}^m + g_{tm} \Gamma_{iw}^m + g_{im} \Gamma_{tw}^m - g_{wm} \Gamma_{ti}^m - g_{tm} \Gamma_{wi}^m \\ \frac{\partial g_{wi}}{\partial x^t} + \frac{\partial g_{it}}{\partial x^w} - \frac{\partial g_{tw}}{\partial x^i} &= 2 g_{im} \Gamma_{wt}^m \end{aligned}$$

Moltiplichiamo a destra e sinistra per $\frac{1}{2} g^{bi}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g^{bi} \left(\frac{\partial g_{wi}}{\partial x^t} + \frac{\partial g_{it}}{\partial x^w} - \frac{\partial g_{tw}}{\partial x^i} \right) &= \frac{1}{2} g^{bi} 2 g_{im} \Gamma_{wt}^m \\ \frac{1}{2} g^{bi} \left(\frac{\partial g_{wi}}{\partial x^t} + \frac{\partial g_{it}}{\partial x^w} - \frac{\partial g_{tw}}{\partial x^i} \right) &= g^{bi} g_{im} \Gamma_{wt}^m \\ g_m^b \Gamma_{wt}^m &= \frac{1}{2} g^{bi} \left(\frac{\partial g_{wi}}{\partial x^t} + \frac{\partial g_{it}}{\partial x^w} - \frac{\partial g_{tw}}{\partial x^i} \right) \\ \delta_m^b \Gamma_{wt}^m &= \frac{1}{2} g^{bi} \left(\frac{\partial g_{wi}}{\partial x^t} + \frac{\partial g_{it}}{\partial x^w} - \frac{\partial g_{tw}}{\partial x^i} \right) \\ \Gamma_{wt}^b &= \frac{1}{2} g^{bi} \left(\frac{\partial g_{wi}}{\partial x^t} + \frac{\partial g_{it}}{\partial x^w} - \frac{\partial g_{tw}}{\partial x^i} \right) \end{aligned}$$

cambiamo la notazione della lettera b con la lettera m ed della i con la lettera n

$$\Gamma_{wt}^m = \frac{1}{2} g^{mn} \left(\frac{\partial g_{wn}}{\partial x^t} + \frac{\partial g_{nt}}{\partial x^w} - \frac{\partial g_{tw}}{\partial x^n} \right)$$

cambiamo le lettere w con i e t con k

$$\Gamma_{ik}^m = \frac{1}{2} g^{mn} \left[\frac{\partial g_{ni}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n} \right]$$

Nota: effettivamente risulta $\Gamma_{ik}^m = \Gamma_{ki}^m$

c.v.d.

Possiamo quindi scrivere:

$$d\vec{V} = d(V^i \vec{e}^i) = (dV^i) \vec{e}^i + V^i \Gamma_{ik}^m dx^k \vec{e}^m$$

Scambiamo gli indici muti m ed i

$$d\vec{V} = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} dx^k \vec{e}^i + V^m \Gamma_{mk}^i \vec{e}^i dx^k$$

per ottenere:

$$d\vec{V} = \left(\frac{\partial V^i}{\partial x^k} + V^m \Gamma_{mk}^i \right) \vec{e}^i dx^k$$

Definiamo “derivata covariante” del vettore $\bar{V} = V^i \bar{e}^i$ e la indichiamo un indice covariante preceduto dal segno “punto e virgola” (poiché il gradiente di uno scalare genera un tensore covariante):

$$V^i_{;k} \equiv \frac{\partial V^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{km} V^m \equiv V^i_{,k} + \Gamma^i_{km} V^m$$

da cui:

$$V^i_{;k} dx^k = V^i_{,k} dx^k + \Gamma^i_{km} V^m dx^k$$

$$d\bar{V} = V^i_{;k} dx^k \bar{e}^i$$

La combinazione $V^i_{;k} dx^k$ ha un solo indice libero “i” e compare nella forma $V^i_{;k} dx^k \bar{e}^i$. E’ quindi evidente che $V^i_{;k} dx^k$ è la componente di un vettore, ossia è un tensore di rango uno. Dato che il differenziale dx^k è un tensore di rango uno $V^i_{;k}$ deve essere un tensore di rango due. Infatti, solo tramite il prodotto di un tensore di rango due con un tensore di rango uno, e la successiva contrazione di uno degli indici, si può ottenere un tensore di rango uno.

In maniera analoga si può determinare la derivata covariante di un tensore covariante V_i di rango uno:

$$V_{i;k} = V_{i,k} - \Gamma^m_{ki} V_m$$

o la derivata covariante di un tensore controvariante T^{kp} di rango due:

$$T^{i;j} = T^{i,j} + \Gamma^i_{qk} T^{qj} + \Gamma^j_{kp} T^{ip}$$

ecc.

Esempio di derivata covariante in coordinate polari

In coordinate polari 2D l'elemento di linea ed il tensore metrico sono:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$$

$$g_{rr} \equiv \bar{e}^r \cdot \bar{e}^r = 1$$

$$g_{\vartheta\vartheta} \equiv \bar{e}^\vartheta \cdot \bar{e}^\vartheta = r^2$$

I simboli di Christoffel non nulli, calcolati tramite il programma Maxima:

```
kill (all);
dim: 2;
array( g, dim, dim);
g[1,1]: 1 $   g[1,2]: 0 $
g[2,1]: 0 $   g[2,2]: r^2 ;
gg: genmatrix ( g, dim, dim);
gg_inv: invert(gg);
kill (ctensor);
load (ctensor);
lg: gg;
cmetric (false);
ct_coords: [r,theta];
christof (mcs);
mcs (true);
```

sono:

$$\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -r$$

$$\Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} = \Gamma_{\vartheta r}^{\vartheta} = \frac{1}{r}$$

I vettori base \bar{e}^r ed \bar{e}^{ϑ} non sono ortonormali, poiché $|\bar{e}^{\vartheta}|^2 = \bar{e}^{\vartheta} \cdot \bar{e}^{\vartheta} = r^2$

Definiamo come base ortonormale

$$\hat{e}^r \equiv \bar{e}^r \text{ ed } \hat{e}^{\vartheta} \equiv \frac{1}{r} \bar{e}^{\vartheta}$$

Per un generico vettore $\vec{V} = V^r \bar{e}^r + V^{\vartheta} \bar{e}^{\vartheta}$ espresso in coordinate polari, la derivata covariante è:

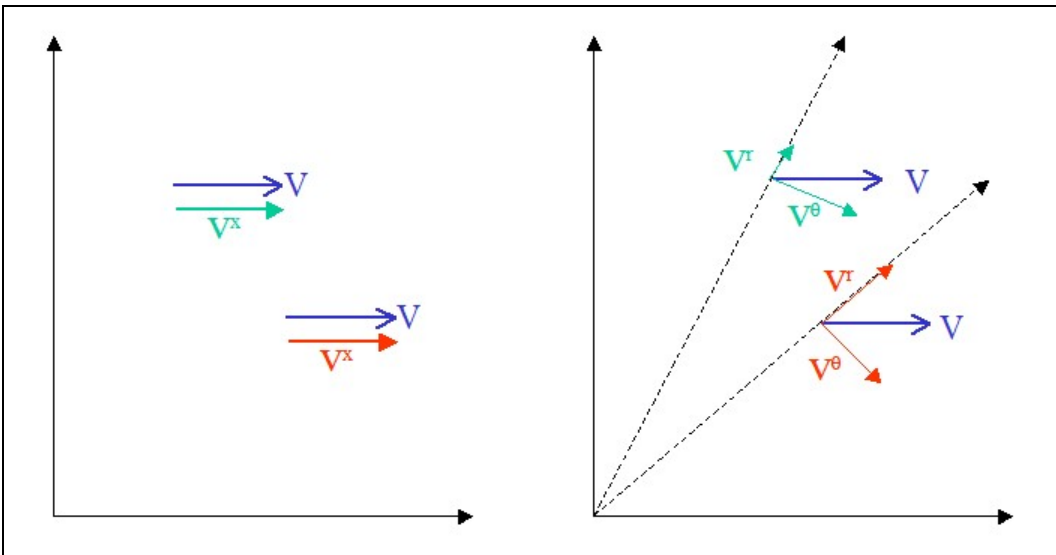
$$V_{;r}^r = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \Gamma_{rr}^r V^r + \Gamma_{r\vartheta}^r V^{\vartheta} = V_{,r}^r$$

$$V_{;\vartheta}^r = \frac{\partial V^r}{\partial \vartheta} + \Gamma_{r\vartheta}^r V^r + \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r V^{\vartheta} = V_{,\vartheta}^r - r V^{\vartheta}$$

$$V_{;r}^{\vartheta} = \frac{\partial V^{\vartheta}}{\partial r} + \Gamma_{rr}^{\vartheta} V^r + \Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} V^{\vartheta} = V_{,r}^{\vartheta} + \frac{1}{r} V^{\vartheta}$$

$$V_{;\vartheta}^{\vartheta} = \frac{\partial V^{\vartheta}}{\partial \vartheta} + \Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} V^r + \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\vartheta} V^{\vartheta} = V_{,\vartheta}^{\vartheta} + \frac{1}{r} V^r$$

Consideriamo un vettore $\vec{V} = \bar{e}^x$ costante che punta nella direzione X di un sistema cartesiano di coordinate



È evidente che in un sistema di riferimento cartesiano le derivate parziali di questo vettore sono nulle, mentre non lo sono in un sistema di riferimento di coordinate polari.

In coordinate polari nulle sono solo le derivate covarianti, poiché queste tengono conto del fatto che nel passare da un punto all'altro oltre alle componenti del vettore variano anche i versori base.

Infatti, cosa succede quando passiamo dal sistema cartesiano a quello polare?

Il vettore $\vec{V} = \bar{e}^x$ espresso nella base ortonormale \hat{e}^r ed \hat{e}^{ϑ} (equivalente alla base ortonormale \bar{e}^x ed \bar{e}^y ruotata di un angolo ϑ rispetto all'asse X originario)

$$\vec{V} = \hat{V}^r \hat{e}^r + \hat{V}^{\vartheta} \hat{e}^{\vartheta} = \cos \vartheta \hat{e}^r - \sin \vartheta \hat{e}^{\vartheta}$$

Per determinare le componenti di \vec{V} nella base non-ortonormale \bar{e}^r ed \bar{e}^{ϑ} basta ricordare che $\hat{e}^r \equiv \bar{e}^r$ ed

$\hat{e}^{\vartheta} \equiv \frac{1}{r} \bar{e}^{\vartheta}$, ossia:

$$\vec{V} = \hat{V}^r \hat{e}^r + \hat{V}^{\vartheta} \hat{e}^{\vartheta} = V^r \bar{e}^r + V^{\vartheta} \frac{1}{r} \bar{e}^{\vartheta} = \cos \vartheta \bar{e}^r - \frac{1}{r} \sin \vartheta \bar{e}^{\vartheta}$$

da cui:

$$V^r = \cos \vartheta$$

$$V^\vartheta = -\frac{1}{r} \sin \vartheta$$

Si può quindi verificare che le derivate covarianti sono tutte nulle:

$$V^r_{;r} = V^r_{;\vartheta} = 0$$

$$V^r_{;\vartheta} = V^r_{;\vartheta} - r V^\vartheta = -\sin \vartheta - r \left(-\frac{1}{r} \sin \vartheta\right) = 0$$

$$V^\vartheta_{;r} = V^\vartheta_{;r} + \frac{1}{r} V^\vartheta = -\frac{1}{r^2} \sin \vartheta + \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r} \sin \vartheta\right) = 0$$

$$V^\vartheta_{;\vartheta} = V^\vartheta_{;\vartheta} + \frac{1}{r} V^r = -\frac{1}{r} \cos \vartheta + \frac{1}{r} \cos \vartheta = 0$$

Derivata covariante del tensore metrico

Sia $A = a^i \bar{e}^i$ un generico vettore (tensore di rango 1)

la sua derivata covariante $a^k_{;j} \equiv \left[\frac{\partial a^k}{\partial x^j} + a^i \Gamma^k_{ij} \right]$ è un tensore misto di rango due, quindi:

$$(E1) \quad g_{ik} a^k_{;j} = a_{i;j}$$

è un tensore totalmente covariante di rango due. D'altro canto:

$$(E2) \quad a_{i;j} = (g_{ik} a^k)_{;j} = g_{ik;j} a^k + g_{ik} a^k_{;j}$$

cosicché dalla (E1) e (E2)

$$(E3) \quad g_{ik} a^k_{;j} = g_{ik;j} a^k + g_{ik} a^k_{;j}$$

La (E3) è verificata se

$$(E4) \quad g_{ik;j} a^k = 0$$

Essendo $A = a^i \bar{e}^i$ è un vettore generico, la (E4) è verificata se

$$(E5) \quad g_{ik;j} = 0$$

In conclusione: la derivata covariante del tensore metrico è sempre nulla.

Trasporto parallelo

Poniamo:

$$\delta V^i(\bar{x}) \equiv -\Gamma^i_{km}(\bar{x}) V^m(\bar{x}) dx^k.$$

Quale è l'interpretazione geometrica del termine δV^i ?

Abbiamo visto che il problema della derivata ordinaria $V^i_{;k}$ sorge dalla sottrazione dei vettori

$V^i(\bar{x} + d\bar{x})$ e $V^i(\bar{x})$ nei due diversi punti $(\bar{x} + d\bar{x})$ e (\bar{x}) . Per superare questo problema bisogna

“trasportare parallelamente” il vettore $V^i(\bar{x})$ nel punto $(\bar{x} + d\bar{x})$. Ma questo è esattamente ciò che la derivata covariante fa. Infatti, per definizione di derivata covariante:

$$V^i_{;k} = V^i_{;k} + \Gamma^i_{km} V^m$$

$$V^i_{;k} = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} - \frac{\delta V^i}{dx^k}$$

Ma nel limite infinitesimo $\partial \bar{x}^k \approx dx^k$, quindi:

$$(E6) \quad V^i_{;k} = \frac{V^i(\bar{x} + d\bar{x}) - \{V^i(\bar{x}) + \delta V^i(\bar{x})\}}{\partial x^k}$$

La eq.E6 mostra che il termine $\delta V^i(\bar{x})$ rappresenta il contributo da aggiungere a $V^i(\bar{x})$ per trasportarlo parallelamente nel punto $(\bar{x} + d\bar{x})$. In altre parole

$$\delta V^i(\bar{x}) \equiv -\Gamma^i_{km}(\bar{x}) V^m(\bar{x}) dx^k$$

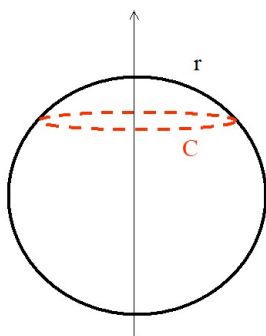
è la variazione di $V^i(\bar{x})$ quando viene trasportato parallelamente lungo il cammino infinitesimo $d\bar{x}$.

Appendice F

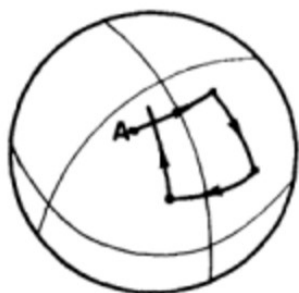
Curvatura di una superficie

Immaginiamo un mondo a due dimensioni (ad esempio la superficie di una sfera) abitato da esseri a due dimensioni. Come potrebbe un abitante di questo mondo stabilire se la superficie su cui striscia è curva o piatta? In altri termini: la curvatura di una superficie è una proprietà intrinseca, che può essere misurata "da dentro", senza riferimenti esterni?

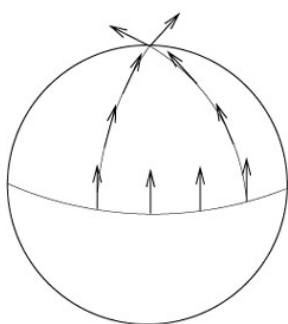
Alcuni modi per misurare intrinsecamente la curvatura di una superficie potrebbero essere i seguenti:



Tracciare una circonferenza sul terreno, misurare la lunghezza C di tale circonferenza e valutarla in rapporto a 2π volte il raggio r . Se risulta $C = 2\pi r$ la superficie è piatta, altrimenti è curva.



Partire da un punto (A, nella figura accanto) e procedere in linea retta per L metri. Poi svoltare di 90° a destra ancora in linea retta per L metri e ripetere in modo da tracciare un quadrato. Se il punto di arrivo non coincide col punto di partenza - cioè se il quadrato non si chiude - possiamo dedurre che quella superficie è in qualche modo curva.

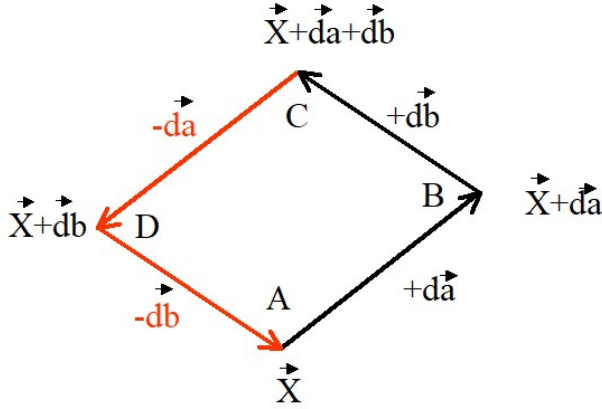


Effettuare il "trasporto parallelo" di un vettore - ad esempio, un giavellotto - lungo un cammino chiuso, mantenendo inalterato passo per passo la direzione del giavellotto rispetto alla linea che stiamo percorrendo.

Se ritornati nel punto di partenza il giavellotto risulta ruotato in una posizione diversa da quella iniziale, possiamo dedurre che la superficie è in qualche modo curva, anzi tanto più curva quanto maggiore è la rotazione della direzione finale del giavellotto rispetto a quella iniziale.

Curvatura e tensore di Riemann

Riemann ha proposto un metodo analitico basato sul trasporto parallelo, che offre il vantaggio di calcolare la curvatura localmente punto per punto e di essere immediatamente estendibile anche a spazi curvi con dimensione superiori a due .



Consideriamo un rettangolo infinitesimo sulla superficie e immaginiamo di effettuare il trasporto parallelo di un vettore V^i lungo la linea chiusa ABCDA, perimetro di un quadrilatero infinitesimo. Le frecce in rosso indicano trasporto in direzione inversa all'incremento $d\bar{a}$ o $d\bar{b}$ della coordinata spaziale.

Abbiamo visto (Appendice E) che nel trasportare la componente V^i lungo un trattino infinitesimo dx^k questa subisce una variazione pari a:

$$\delta V^i(\bar{x}) \equiv -\Gamma_{km}^i(\bar{x}) V^m(\bar{x}) dx^k$$

Quindi trasportandola lungo la linea chiusa ABCDA avremo:

$$\delta V^i_{ABCD} = \delta V^i_{AB} + \delta V^i_{BC} + \delta V^i_{CD} + \delta V^i_{DA}$$

Tenendo conto del verso dello spostamento abbiamo:

$$\delta V^i_{AB} = -\Gamma_{km}^i(\bar{x}) V^m(\bar{x}) da^k$$

$$\delta V^i_{BC} = -\Gamma_{km}^i(\bar{x} + d\bar{a}) V^m(\bar{x} + d\bar{a}) db^k$$

$$\delta V^i_{CD} = +\Gamma_{km}^i(\bar{x} + d\bar{b}) V^m(\bar{x} + d\bar{b}) da^k$$

$$\delta V^i_{DA} = +\Gamma_{km}^i(x) V^m(x) db^k$$

Raggruppiamo opportunamente i termini

$$\delta V^i_{CD} + \delta V^i_{AB} = +\Gamma_{km}^i(\bar{x} + d\bar{b}) V^m(\bar{x} + d\bar{b}) da^k - \Gamma_{km}^i(\bar{x}) V^m(\bar{x}) da^k$$

$$\delta V^i_{CD} + \delta V^i_{AB} \approx \frac{\partial \{ \Gamma_{km}^i V^m \}}{\partial x^r} db^r da^k$$

e analogamente:

$$\delta V^i_{BC} + \delta V^i_{DA} = -\Gamma_{km}^i(\bar{x} + d\bar{a}) V^m(\bar{x} + d\bar{a}) db^k + \Gamma_{km}^i(x) V^m(x) db^k$$

$$\delta V^i_{BC} + \delta V^i_{DA} \approx -\frac{\partial \{ \Gamma_{km}^i V^m \}}{\partial x^r} da^r db^k$$

Complessivamente:

$$\delta V^i = \delta V^i_{ABCD} \approx \frac{\partial \{ \Gamma_{km}^i V^m \}}{\partial x^r} db^r da^k - \frac{\partial \{ \Gamma_{km}^i V^m \}}{\partial x^r} da^r db^k$$

$$\delta V^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^r} V^m db^r da^k + \Gamma_{km}^i \frac{\partial V^m}{\partial x^r} db^r da^k - \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^r} V^m da^r db^k - \Gamma_{km}^i \frac{\partial V^m}{\partial x^r} da^r db^k$$

Scambiamo gli indici muti r e k nel terzo e quarto termine a destra:

$$\delta V^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^r} V^m db^r da^k + \Gamma_{km}^i \frac{\partial V^m}{\partial x^r} db^r da^k - \frac{\partial \Gamma_{rm}^i}{\partial x^k} V^m da^k db^r - \Gamma_{rm}^i \frac{\partial V^m}{\partial x^k} da^k db^r$$

$$(F1) \quad \delta V^i = \left(\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{rm}^i}{\partial x^k} \right) V^m db^r da^k + \left(\Gamma_{km}^i \frac{\partial V^m}{\partial x^r} - \Gamma_{rm}^i \frac{\partial V^m}{\partial x^k} \right) da^k db^r$$

Se il vettore è trasportato parallelamente:

$$\delta V^m(\bar{x}) \equiv -\Gamma_{rq}^m(\bar{x}) V^q(\bar{x}) dx^r$$

che equivale a:

$$\frac{\partial V^m}{\partial x^k} = -\Gamma_{kq}^m V^q \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial V^m}{\partial x^r} = -\Gamma_{rq}^m V^q$$

Sostituendo nella eq.F1

$$(F2) \quad \delta V^i = \left(\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{rm}^i}{\partial x^k} \right) V^m db^r da^k + (-\Gamma_{km}^i \Gamma_{rq}^m + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{kq}^m) V^q da^k db^r$$

Cambiamo nome agli indici muti nel secondo termine a destra:

$$\delta V^i = \left(\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{rm}^i}{\partial x^k} \right) V^m db^r da^k + (-\Gamma_{ks}^i \Gamma_{rm}^s + \Gamma_{rs}^i \Gamma_{km}^s) V^m da^k db^r$$

e finalmente:

$$\delta V^i = \left(\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{rm}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{rs}^i \Gamma_{km}^s - \Gamma_{ks}^i \Gamma_{rm}^s \right) V^m da^k db^r$$

$$(F3) \quad \delta V^i = R_{mrk}^i V^m da^k db^r$$

dove

$$(F4) \quad R_{mrk}^i \equiv \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{rm}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{rs}^i \Gamma_{km}^s - \Gamma_{ks}^i \Gamma_{rm}^s$$

è il “tensore di Riemann”.

La eq.F3 mostra che il cambiamento δV^i della componente V^i in seguito al trasporto parallelo dipende linearmente dalle componenti V^m del vettore stesso e dal cammino infinitesimo percorso. Il fattore di proporzionalità - detto tensore di Riemann - dovrebbe quindi rappresentare in qualche modo la curvatura locale della superficie delimitata dal cammino infinitesimo percorso.

Il tensore di Riemann gode delle seguenti simmetrie:

$$(F5) \quad R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = +R_{cdab}$$

Nello spazio quadridimensionale della teoria della relatività il tensore di Riemann è un tensore di rango quattro con, a priori, $4^4 = 256$ componenti. In realtà numerose simmetrie riducono a venti il numero delle componenti non nulle.

Partendo dal tensore di rango quattro di Riemann possiamo formare (contraendo il primo e terzo indice) un tensore di rango due $R_{ij} \equiv R^m{}_{imj}$ detto “tensore di Ricci” e, contraendo ancora gli indici di quest’ultimo possiamo formare uno scalare $R \equiv g^{ij} R_{ij} = R^i{}_i$, detto “scalare di curvatura”.

Si verifica, ad esempio tramite il seguente programma *Maxima*:

```
kill (all);
dim: 2;
array(g,dim,dim);
g[1,1]: r^2$ g[1,2]: 0$
g[2,1]: 0$ g[2,2]: r^2·sin(theta)^2;
gg: genmatrix(g,dim,dim);
gg_inv: invert(gg);
kill (ctensor);
load (ctensor);
lg: gg;
cmetric(false);
ct_coords:[theta,phi];
christof (false);
riemann (false);
lriemann (false);
ricci (false);
R: scurvature();
```

che in uno spazio a due dimensioni, ad esempio la superficie di una sfera di raggio r , risulta: $R = \frac{2}{r^2}$,
ossia che lo scalare di curvatura R è proporzionale alla curvatura $\frac{1}{r^2}$ (secondo Gauss) della sfera.

Appendice G

Derivata covariante del tensore di Ricci

Vogliamo dimostrare che la derivata covariante del tensore di Ricci non è in generale nulla, bensì:

$$R_{;i}^{ij} = \frac{1}{2} g^{ij} R_{;i}$$

Partiamo dalla seconda identità di Bianchi:

$$R_{abcd;e} + R_{abde;c} + R_{abec;d} = 0$$

e contraiamo gli indici (a,c):

$$g^{ca} (R_{abcd;e} + R_{abde;c} + R_{abec;d}) = 0$$

$$(G1) \quad R_{bcd;e}^c + R_{bde;c}^c + R_{bec;d}^c = 0$$

Per la anti-simmetria del terzo e quarto indice del tensore di Riemann:

$$R_{bec}^c = -R_{bce}^c = -R_{be}$$

quindi la G1 diventa:

$$R_{bd;e} + R_{bde;c}^c - R_{be;d} = 0$$

Contraiamo ora gli indici (b,e):

$$g^{eb} (R_{bd;e} + R_{bde;c}^c - R_{be;d}) = 0$$

$$R_{d;e}^e + R_{de;c}^{ce} - R_{e;d}^e = 0$$

$$(G2) \quad R_{d;e}^e + R_{de;c}^{ce} - R_{;d} = 0$$

Ma $R_{de}^{ce} = R_{ed}^{ec} = R_{;d}^c$

Quindi la eq.G2 diventa:

$$R_{d;e}^e + R_{d;c}^c - R_{;d} = 0$$

$$2R_{d;e}^e - R_{;d} = 0$$

$$R_{d;e}^e = \frac{1}{2} R_{;d}$$

Innalziamo l'indice d:

$$g^{jd} R_{d;e}^e = g^{jd} \frac{1}{2} R_{;d}$$

$$R_{;e}^{ej} = g^{jd} \frac{1}{2} R_{;d} = g^{dj} \frac{1}{2} R_{;d}$$

e infine cambiamo nome agli indici muti:

$$R_{;i}^{ij} = \frac{1}{2} g^{ij} R_{;i}$$

c.v.d.

Appendice H

Forma alternativa dell'equazione di Einstein

Moltiplichiamo l'eq. (17)

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = k T^{ij}$$

per il tensore metrico covariante g_{ij} :

$$(H1) \quad g_{ij} R^{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} g^{ij} R = k g_{ij} T^{ij}$$

Dato che g_{ij} è l'inverso di g^{ij} (ossia $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$), risulta:

$$g_{ij} g^{ij} = \delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 + \delta_4^4 = 4$$

La eq.H1 diventa quindi:

$$(H2) \quad g_{ij} R^{ij} - 2R = k g_{ij} T^{ij}$$

Per definizione, lo scalare R di curvatura è :

$$R \equiv g_{ij} R^{ij}$$

Definiamo in maniera analoga lo scalare T del tensore densità di energia:

$$T \equiv g_{ij} T^{ij}$$

Dalla eq.H2 abbiamo quindi:

$$-R = kT$$

che moltiplicato per $-\frac{1}{2} g^{ij}$ da:

$$(H3) \quad \frac{1}{2} g^{ij} R = -\frac{1}{2} g^{ij} kT$$

Sommando la eq.H3 alla eq.17 si ottiene:

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R + \left(\frac{1}{2} g^{ij} R\right) = k T^{ij} + \left(-\frac{1}{2} g^{ij} kT\right)$$

$$(H4) \quad R^{ij} = k \left(T^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} T\right)$$

Questa è la cosiddetta "forma alternativa" dell'equazione di Einstein.

Appendice I

Equivalenza nel limite relativistico delle equazioni del moto

Nello spazio quadridimensionale Minkowskiano le coordinate sono:

$$x^k = [x, y, z, ct] = [x^1, x^2, x^3, x^4],$$

e l'elemento di linea è:

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$$

$$ds^2 = -\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} dt^2 + c^2 dt^2 = -v^2 dt^2 + c^2 dt^2$$

Nel limite della meccanica classica $v \ll c$:

$$ds^2 \approx +c^2 dt^2 = (dx^4)^2$$

quindi:

$$ds \approx dx^4 = c dt.$$

Dalla disuguaglianza $v \ll c$, ossia:

$$v^j = \left| \frac{dx^j}{dt} \right| = c \left| \frac{dx^j}{c dt} \right| \approx c \left| \frac{dx^j}{ds} \right| \ll c$$

si deduce che:

$$\left| \frac{dx^j}{ds} \right| \ll 1 \text{ per } j=1,2,3$$

mentre, essendo $|ds| \approx c|dt|$:

$$\frac{dx^4}{ds} \approx \frac{dx^4}{dx^4} = 1$$

Questa approssimazione semplifica notevolmente le equazioni del moto relativistico

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

Infatti tutti i termini che contengono $\frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$ con l'indice j e $k=1,2,3$ e quelli misti $\frac{dx^j}{ds} \frac{dx^4}{ds}$ con

l'indice $j=1,2,3$ sono trascurabili rispetto a quelli che contengono $\frac{dx^4}{ds} \frac{dx^4}{ds} \approx 1$.

Di conseguenza l'equazione del moto si riduce a:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} \approx -\Gamma_{44}^i \frac{dx^4}{ds} \frac{dx^4}{ds} = -\Gamma_{44}^i = -\frac{1}{2} g^{im} \left[\frac{\partial g_{m4}}{\partial x^4} + \frac{\partial g_{m4}}{\partial x^4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^m} \right]$$

Ma in una metrica quasi Minkowskiana ($g_{jk} \approx \eta_{jk}$) e stazionaria nel tempo ($\frac{\partial g_{jk}}{\partial t} = c \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^4} = 0$):

$$\begin{aligned} \Gamma_{44}^i &= \frac{1}{2} g^{im} \left[\frac{\partial g_{m4}}{\partial x^4} + \frac{\partial g_{m4}}{\partial x^4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^m} \right] \\ &\approx \frac{1}{2} g^{im} \left[-\frac{\partial g_{44}}{\partial x^m} \right] = -\frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^m} \\ &= +\frac{1}{2} (g^{i1} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} + g^{i2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^2} + g^{i3} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^3} + g^{i4} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{44}^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^i} \text{ per } i=1,2,3.$$

L'equazione del moto relativistico si riduce quindi a:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}$$
$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}$$
$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx \frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}$$

Appendice L

Equivalenza nel limite relativistico delle equazioni del campo gravitazionale

Consideriamo l'equazione del campo di Einstein nella forma alternativa

$$R^{ij} = k(T^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}T)$$

Cominciamo con il tensore di Ricci, contrazione del tensore di Riemann:

$$R_{ij} \equiv R^m{}_{imj} = -\frac{\partial \Gamma_{im}^m}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^m} - \Gamma_{im}^r \Gamma_{rj}^m + \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rm}^m$$

dove

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}g^{km} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right]$$

Assumiamo che g_{ij} sia quasi Minkowskiano ($g_{ij} \approx \eta_{ij}$)

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} -(1+h_{11}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+h_{22}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+h_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+h_{44} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \eta_{ij}$$

dove $h_{ii} \ll 1$.

Gli ultimi due termini del tensore di Riemann nella forma $(\Gamma)^2$ sono trascurabili del secondo ordine in h^2 , poiché

$$\Gamma_{ij}^m \approx \pm \frac{1}{2} \frac{1}{(1+h_{km})} \left[\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} \right] \approx \pm \frac{h_{km}}{2} \left[\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} \right]$$

è proporzionale alla perturbazione h della metrica. Di conseguenza:

$$R_{imj}^m = -R_{ijm}^m \approx -\frac{\partial \Gamma_{im}^m}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^m}$$

In particolare per $i=j=4$:

$$R_{4m4}^m \approx -\frac{\partial}{\partial x^4} \Gamma_{4m}^m + \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma_{44}^m = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{4m}^m + \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma_{44}^m$$

Se si assume che il campo sia statico il primo termine a destra è nullo e rimane solo parte del secondo termine:

$$R_{4m4}^m \approx +\frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma_{44}^m = +\frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma_{44}^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} \Gamma_{44}^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} \Gamma_{44}^3$$

Ma:

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma_{44}^1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{2} g^{k1} \left[\frac{\partial g_{4k}}{\partial x^4} + \frac{\partial g_{4k}}{\partial x^4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^k} \right] \right) = -\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{2} g^{k1} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^k} \right) = -\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \right) = +\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{44}}{(\partial x^1)^2}$$

ed analogamente per $\frac{\partial}{\partial x^2} \Gamma_{44}^2$ e $\frac{\partial}{\partial x^3} \Gamma_{44}^3$:

$$R_{44} \equiv R_{4m4}^m \approx +\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial z^2} \right)$$

Essendo $g_{44} = 1 - 2 \frac{\Phi}{c^2}$

risulta:

$$R_{44} \approx +\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi$$

Innalziamo gli indici

$$R^{ij} = g^{im} g^{jn} R_{mn} \approx \eta^{im} \eta^{jn} R_{mn}$$

$$R^{44} \approx \eta^{4m} \eta^{4n} R_{mn} = \eta^{4m} \eta^{4n} R_{mn} = R_{44}$$

$$(L1) \quad R^{44} \approx -\frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi$$

Ma dalla equazione del campo gravitazionale di Newton risulta:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho$$

Di conseguenza:

$$R^{44} \approx \frac{4\pi G \rho}{c^2}$$

Consideriamo ora la componente puramente temporale del termine a destra della eq.18. La componente predominante del tensore densità di energia è:

$$(L2) \quad T^{44} = \rho c^2$$

poiché tutte le altre componenti (per definizione $T^{ij} \equiv \rho_0 U^i U^j$) sono trascurabili quando $v \ll c$, quindi:

$$(L3) \quad T = g_{ij} T^{ij} = \eta_{ij} T^{ij} = \rho c^2$$

Sostituendo la (L1), (L2) e (L3) nella componente puramente temporale

$$R^{44} = k \left(T^{44} - \frac{1}{2} g^{44} T \right)$$

dell'equazione di Einstein in forma alternativa abbiamo:

$$\frac{4\pi G \rho}{c^2} = k \left(\rho c^2 - \frac{1}{2} \rho c^2 \right)$$

$$\frac{4\pi G \rho}{c^2} = \frac{k}{2} \rho c^2$$

Risulta così determinato il valore della costante di proporzionalità

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

Appendice M

Esempio della teoria della gravitazione secondo Einstein

Consideriamo il campo gravitazionale generato da una massa M puntiforme ed un sistema di riferimento spazio-tempo in coordinate polari $[r \ \vartheta \ \varphi \ ct]$ ad essa solidale.

Nello vuoto, al di fuori dello spazio occupato dalla massa M , dove $T_{ij} = 0$ e $T = 0$, l'equazione (in

forma alternativa) $R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T)$ del campo gravitazionale di Einstein si riduce a:

$$(M1) \quad R_{ij} = 0$$

Soluzione di Schwarzschild

La soluzione della M1 è stata trovata da Schwarzschild sulla base delle seguenti considerazioni.

In un simile campo gravitazionale vige la simmetria centrale rispetto alle coordinate spaziali polari e la stazionarietà rispetto alla coordinata tempo t . Lontano dalla massa M che genera il campo lo spazio-tempo è euclideo e l'elemento infinitesimo di linea in coordinate sferiche è:

$$(M2) \quad ds^2 = -dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - (r \sin \vartheta)^2 d\varphi^2 + d(ct)^2$$

Invece in una regione prossima alla massa M lo spazio-tempo non è più euclideo. Schwarzschild modifica l'espressione dell'elemento di linea tramite due coefficienti $A(r)$ e $B(r)$ che dipendono solo dalla coordinata radiale r :

$$(M3) \quad ds^2 = -A(r)dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - (r \sin \vartheta)^2 d\varphi^2 + B(r) d(ct)^2$$

Con le componenti diagonali g_{ii} del corrispondente tensore metrico modificato si può calcolare il tensore di Ricci tramite il seguente programma *Maxima*:

```
kill (all);
A: A(r)$
B: B(r)$
dim: 4$
array(g, dim, dim);
g[1,1]:-A$ g[1,2]:0$ g[1,3]:0$ g[1,4]:0$
g[2,1]:0$ g[2,2]:-r^2$ g[2,3]:0$ g[2,4]:0$
g[3,1]:0$ g[3,2]:0$ g[3,3]:-(r*sin(theta))^2$ g[3,4]:0$
g[4,1]:0$ g[4,2]:0$ g[4,3]:0$ g[4,4]:c^2*B;
gg: genmatrix(g, dim, dim);
gg_inv:invert(gg);
kill (ctensor);
load (ctensor);
lg: gg;
cmetric (false);
ct_coords: [r, theta, phi, t];
ricci (true);
```

Quattro (R_{ii} , con $i = 1, 2, 3, 4$) sono le componenti diverse da zero del tensore di Ricci. Imponiamo che si annullino:

$$(M4) \quad 2rAB \frac{d^2B}{dr^2} - rA \left(\frac{dB}{dr}\right)^2 - rB \frac{dA}{dr} \frac{dB}{dr} - 4B^2 \frac{dA}{dr} = 0$$

$$(M5) \quad r A \frac{dB}{dr} - r B \frac{dA}{dr} + 2 B (A - A^2) = 0$$

$$(M6) \quad \sin(\vartheta)^2 \left\{ r A \frac{dB}{dr} - r B \frac{dA}{dr} + 2 B (A - A^2) \right\} = 0$$

$$(M7) \quad 2 r A B \frac{d^2 B}{dr^2} - r A \left(\frac{dB}{dr} \right)^2 + \left\{ 4 A B - r B \frac{dA}{dr} \right\} \frac{dB}{dr} = 0$$

Sottraendo la eq.M4 dalla eq.M7 abbiamo:

$$B \frac{dA}{dr} + A \frac{dB}{dr} = 0$$

quindi:

$$A B = \text{costante}$$

Dato che per r tendente all'infinito (dove la metrica torna ad essere euclidea) $A(\infty) = 1$ e $B(\infty) = 1$ deve essere:

$$(M8) \quad A(r) B(r) = 1$$

Sostituendo la eq.M8 nella eq.M5 si ottiene:

$$r \frac{dB}{dr} - r B^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{B} \right) + 2 B - 2 = 0$$

la cui soluzione è:

$$(M9) \quad B(r) = 1 - \frac{R_s}{r}$$

dove R_s è una costante denominata "raggio di Schwarzschild".

Dalle eq.M8 e eq.M9 risulta:

$$(M10) \quad A(r) = \left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^{-1}$$

In conclusione la soluzione di Schwarzschild della equazione M1 del campo gravitazionale nelle coordinate $[r \ \vartheta \ \varphi \ ct]$ è:

$$(B11) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \end{bmatrix}$$

Il raggio di Schwarzschild

Per determinare R_s basta ricordare (eq.19) che nel limite relativistico:

$$g_{44} = 1 - \frac{2}{c^2} \frac{MG}{r}$$

quindi:
$$1 - \frac{R_s}{r} = 1 - \frac{2}{c^2} \frac{MG}{r}$$

$$(M12) \quad R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Rivoluzione di un grave

Come esempio, consideriamo il caso più semplice di una particella che ruota sul piano equatoriale

$$\mathcal{G} = \frac{\pi}{2} \text{ attorno alla massa } M.$$

In questo caso le coordinate dello spazio-tempo sono solo tre $[r \ \varphi \ t]$ e l'elemento infinitesimo di linea è:

$$(M13) \quad ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) d(ct)^2$$

Le equazioni del moto, che possono essere calcolate tramite il seguente programma *Maxima*:

```
kill (all);
dim: 3;
array(g, dim, dim);
g[1,1]: -1/(1-R[s]/r)$ g[1,2]: 0$ g[1,3]:0$
g[2,1]: 0$ g[2,2]: -r^2$ g[2,3]:0$
g[3,1]: 0$ g[3,2]: 0$ g[3,3]: (c^2)*(1-R[s]/r);
gg: genmatrix(g,dim,dim);
gg_inv: invert(gg);
kill (ctensor);
load (ctensor);
lg: gg;
cmetric (false);
ct_coords: [r, phi, t];
cgeodesic (true);
```

sono:

$$(M14) \quad \frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{R_s}{2r(r-R_s)} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - (r-R_s) \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{c^2 R_s (r-R_s)}{2r^3} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

$$(M15) \quad \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0$$

$$(M16) \quad \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{R_s}{r(r-R_s)} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

Queste equazioni valgono per una generica traiettoria nel piano $\mathcal{G} = \frac{\pi}{2}$.

Traiettoria circolare

Nel caso particolare, ancora più semplice, in cui la particella ruoti su una circonferenza di raggio R , la coordinata radiale r è costante. In questo caso la eq.M15, che può essere riscritta così:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi^2}{dt} = 0$$

dice semplicemente che $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0$, ossia che la velocità angolare è costante. Poniamo quindi:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{v}{R}$$

dove v è la velocità lineare.

In maniera analoga possiamo riscrivere l'equazione del moto M14:

$$(M17) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{R_s}{2r(r-R_s)} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - (r-R_s) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{c^2 R_s (r-R_s)}{2r^3} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{R_s}{2r(r-R_s)} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - (r-R_s) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{c^2 R_s (r-R_s)}{2r^3} = 0$$

Dalla eq.M17 si deduce che sulla circonferenza di raggio R , dove $\frac{dr}{dt} = 0$ e $\frac{R d\varphi}{dt} = v$, se il raggio della traiettoria è molto più grande del raggio di Schwarzschild, ossia se $R \gg R_s$:

$$\left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_{at r=R} \approx +R \left. \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right|_{at r=R} - \frac{c^2 R_s}{2R^2} = +\frac{1}{R} \left(\frac{R d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{c^2}{2R^2} \frac{2GM}{c^2}$$

Dato che $R_s = \frac{2GM}{c^2}$:

$$\left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_{at r=R} \approx +\frac{v^2}{R} - \frac{GM}{R^2}$$

Essendo l'orbita stazionaria:

$$\left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_{at r=R} = 0$$

L'accelerazione della particella è nulla, poiché l'accelerazione centrifuga $\frac{v^2}{R}$ è compensata

dall'accelerazione centripeta gravitazionale $\frac{GM}{R^2}$ di Newton, in accordo con la conclusione A11 della teoria della gravitazione classica.

Duplici rallentamento del tempo

Riguardo al tempo la eq.M16, che può essere così riscritta:

$$\frac{d^2 t}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{R_s}{r(r-R_s)} \frac{dr}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 t}{dt^2} + \frac{R_s}{r(r-R_s)} \frac{dr}{dt} = 0$$

sulla circonferenza di raggio R , dove $\frac{dr}{dt} = 0$, ci dice $\frac{d^2 t}{dt^2} = 0$, ossia nulla.

Per avere informazioni sulla deformazione (rallentamento o accelerazione) del tempo possiamo ricorrere alla eq.M13, che può essere così riscritta:

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2}$$

Essendo $\frac{dr}{dt} = 0$ e $\frac{R d\varphi}{dt} = v$ sulla circonferenza dove $r = R$:

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \Big|_{at r=R} = \frac{1}{\left(R \frac{d\phi}{dt}\right)^2 - \left(1 - \frac{R_s}{R}\right) c^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{R}\right) - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$(M18) \quad \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \Big|_{at r=R} = -\frac{1}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{R_s}{R}}$$

Il tempo t è il tempo dell'orologio di un osservatore S_0 il cui sistema di riferimento SDS_0 è fisso rispetto alla massa M che genera il campo gravitazionale. L'orologio dell'osservatore S_0 è però fisicamente localizzato ad una distanza molto grande (infinita) rispetto all'origine dello SDS_0 . Definiamo "tempo relativo" il tempo t segnato da questo orologio.

Consideriamo poi un secondo osservatore S_1 (dotato del medesimo tipo di orologio usato dall'osservatore S_0) il cui sistema di riferimento SDS_1 è solidale con la particella in moto nel campo gravitazionale. Solidale significa che nel sistema SDS_1 la coordinata spaziale della particella è sempre zero. L'orologio di S_1 è quindi fisicamente localizzato in ogni istante nel punto dove si trova la particella; chiamiamo "tempo proprio" il tempo di questo orologio e lo indichiamo con la lettera τ . Dato che l'elemento di linea ds è un tensore di rango zero (quindi un invariante rispetto a qualsiasi sistema di riferimento e trasformazione di coordinate) possiamo scrivere:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

Riscriviamo la (M18) in termini del tempo proprio:

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \frac{dt^2}{-c^2 d\tau^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{R_s}{R}}$$

$$(M19) \quad dt^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{R_s}{R}} d\tau^2$$

$$(M19) \quad d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{R_s}{R}} dt$$

Se il raggio della traiettoria è molto più grande del raggio di Schwarzschild, ossia se $R \gg R_s$:

$$(M20) \quad d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

La eq.M20 è esattamente ciò che prevede la relatività ristretta a causa della velocità costante di rivoluzione della particella attorno alla massa M .

In relatività generale però il tempo proprio dell'orologio solidale con la particella, secondo la eq.M19, scorre ancora più velocemente ($d\tau < dt$) di quanto previsto dalla relatività ristretta quanto minore è la distanza R che separa la particella dall'origine (*dove si trova la massa M*) e quanto maggiore è il raggio di Schwarzschild, ossia quanto maggiore è la massa M che genera il campo gravitazionale.