FONDAMENTI DI FISICA GENERALE

Ingegneria Meccanica – Roma Tre

AA/2011-2012

APPUNTI PER IL CORSO

Roberto Renzetti

PARTE QUATTORDICESIMA

LA CINEMATICA E LA DINAMICA RELATIVISTICHE

Roberto Renzetti

INTRODUZIONE

In tutto ciò che seguirà considereremo soltanto sistemi inerziali, sistemi sui quali è valida la meccanica di Newton.

Scelto un sistema inerziale (con buona approssimazione e per un tempo breve la Terra può essere considerata un tale sistema), tutti quei sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso, saranno anch'essi sistemi inerziali.

Il principio galileiano di relatività ci dice che nessuno degli infiniti sistemi inerziali è privilegiato, pertanto nessuno di essi potrà essere considerato come assolutamente in quiete. Al contrario, per semplicità, noi possiamo collocarci su uno qualunque di questi sistemi inerziali e considerarlo come se fosse in quiete relativamente a tutti gli altri che saranno animati di moto rettilineo uniforme rispetto ad esso. Chiameremo con S il sistema (di coordinate Oxyz) considerato in quiete rispetto a noi e con S' (di coordinate O'x'y'z') un altro qualunque dei sistemi in moto con velocità v rispetto ad S. Indicheremo poi con T un osservatore che si trovi sul sistema S e con T' un osservatore che si trovi sul sistema S'. Più in generale, ogni grandezza senza apice sarà relativa a misure effettuate da S, mentre ogni grandezza con apice sarà relativa a misure effettuate da S'.

I postulati fondamentali che saranno alla base di quanto diremo sono:

1) **PRINCIPIO DI RELATIVITA'**: tutte le leggi fisiche hanno la stessa forma in tutti i sistemi inerziali.

2) **PRINCIPIO DI COSTANZA DELLA VELOCITA' c DELLA LUCE**: la velocità della luce nello spazio vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento risultando indipendente dalla velocità del corpo emittente (per essa daremo il valore approssimato: c = 300.000 Km/sec = 3.10^8 m/sec = 300 m/µsec).

Per il resto non daremo nulla per scontato: dovremo andare a vedere quali sono le conseguenze che questi due postulati comportano con l'osservazione che a tutt'oggi (1983) non sono mai stati smentiti dall'esperienza. Dovremo quindi ricostruire una fisica che discenda dall'ammissione dei due postulati precedenti, a partire dai concetti base posti tradizionalmente a fondamento della fisica.

I problemi che in generale dovremo risolvere sono del tipo:

- Siano dati i due riferimenti inerziali:

S in quiete,

S' in moto rettilineo uniforme rispetto ad S.

Supponiamo di conoscere la posizione (e cioè le coordinate) e la velocità di un oggetto in S, come si può calcolare la posizione (e cioè le coordinate) e la velocità di un oggetto in S' ?

Cerchiamo allora delle equazioni che trasformino le grandezze conosciute nelle grandezze cercate.

Per semplicità ci riferiremo sempre ai due sistemi S ed S' che si muovono uno relativamente all'altro mantenendo i loro assi rispettivamente paralleli in modo che l'asse O'x' del sistema S' scivoli lungo l'asse Ox del sistema S, nel suo verso positivo e con velocità v (problema unidimensionale). Secondo il principio di relatività tutto va come se l'asse Ox del sistema S scivolasse lungo l'asse O'x' del sistema S', nel suo verso negativo e con velocità - v.

L'aver scelto spostamenti del tipo annunciato ci permetterà di porre y = y' e z = z'.

- COME MISURARE IL TEMPO

Abbiamo già detto che non dobbiamo dare niente per scontato, almeno per quel che riguarda la definizione dei concetti che sono alla base della fisica.Occorre dunque accordarci su di un metodo che ci permetta di misurare il tempo sia nei sistemi S ed S', sia dal sistema S al sistema S', sia dal sistema S' al sistema S.

Innanzitutto occorrerà disporre di orologi di assoluta precisione ed assolutamente identici(1). La lettura diretta dell'orologio permetterà di dare il tempo di un dato luogo in un fissato sistema di riferimento: l'osservatore T di S leggerà direttamente il tempo sull'orologio che ha con sé e questo sarà il tempo del luogo di S in cui si trova T; analogamente per l'osservatore T', esso opererà allo stesso modo per dare il tempo del luogo di S' in cui egli si trova.

E fin qui tutto è addirittura ovvio. L'unica cosa che può disturbare è forse la pignoleria delle specificazioni, lo scopo delle quali, d'altra parte, sarà chiaro più avanti.

Supponiamo ora di trovarci su un dato riferimento S e di considerare in esso due luoghi A e B, distanti tanto da rendere impossibile il confronto diretto dei due orologi che ivi si trovano. Come si fa a sapere se i due orologi segnano lo stesso tempo? Possiamo pensare di disporre di un sistema televisivo a circuito chiuso: un dato orologio è inquadrato da una telecamera che invia le sue immagini ad un televisore che si trova vicino all'altro orologio; un'altra telecamera inquadrerà quest'ultimo orologio ed invierà le sue immagini ad un televisore posto vicino al primo orologio; già che ci siamo allarghiamo l'inquadratura di questa seconda telecamera in modo che essa riprenda, oltre all'orologio, anche il televisore posto vicino ad essa (figura 1).

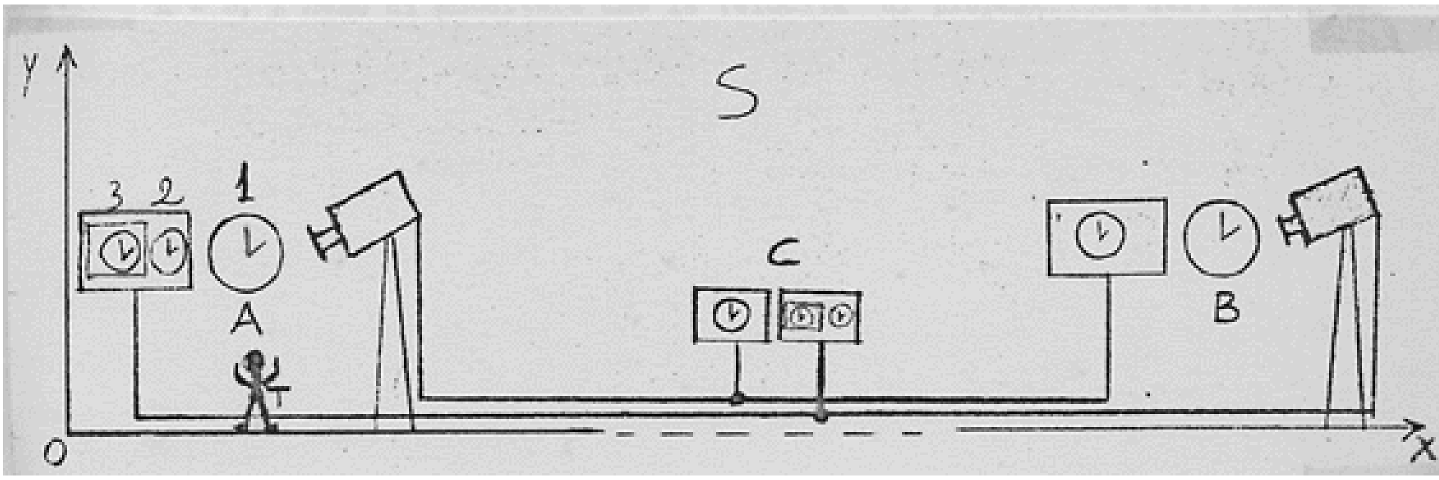

figura 1

Se l'immagine ripresa dalla telecamera viaggiasse ad una velocità infinita non vi sarebbero problemi per stabilire l'accordo tra i due orologi. Basterebbe confrontare direttamente l'immagine televisiva con l'orologio per sapere se i due orologi segnano lo stesso tempo. L'immagine viaggia però con una velocità grandissima ma finita, quella delle onde elettromagnetiche e quindi della luce. Ciò comporta che, riferendosi alla figura 44, un osservatore T che si trovi nel luogo A osserverà che i *tre* orologi che egli vede segnano tempi differenti: l'orologio 1 che egli ha di fronte segnerà un dato tempo; l'immagine 2 dell'orologio che si trova in B segnerà un tempo inferiore; l'immagine 3 dell'orologio che si trova in A, ripresa dalla telecamera B e quindi rinviata in A, segnerà un tempo ancora inferiore. Infatti: il tempo t_1 segnato dall'orologio 1 è quello letto all'istante dell'osservazione; il tempo t_2 segnato dall'immagine 2 è quello che segnava l'orologio di B quando, alcuni istanti prima (il tempo necessario alla luce per percorrere la distanza esistente tra B ed A), veniva ripresa la sua immagine dalla telecamera B; il tempo t_3 segnato dall'immagine 3 è quello che segnava l'orologio in A quando, ancora alcuni istanti prima (il tempo necessario alla luce per percorrere la distanza esistente tra A e B due volte, andata e ritorno), veniva ripresa la sua immagine dalla telecamera A.

Cosa potrà sostenere, riguardo al tempo, l'osservatore T ?

Che non c'è nessuna regola che permetta di sincronizzare i due orologi A e B, a meno di ammettere che la velocità di propagazione dell'immagine sia la stessa sia nel verso AB che nel verso opposto M, in accordo con il principio di costanza della velocità della luce.

Ammesso ciò i due orologi A e B segneranno lo stesso tempo quando:

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$$

quando cioè l'intervallo $t_2 - t_1$ di tempo necessario all'immagine per propagarsi da A a B è uguale all'intervallo $t_3 - t_2$ di tempo necessario alla immagine per tornare da B ad A.

Ciò vuol dire che i due orologi A e B saranno sincronizzati quando:

$$t_2 = ½ (t_1 + t_3)$$

e cioè quando il tempo t_2 che l'osservatore T legge sull'immagine 2 è la media aritmetica dei tempi letti sull'orologio 1 e sulla immagine 3.

Questo metodo di sincronizzazione può essere assunto come generale per qualunque luogo di S distinto da A e B.

Si può aggiungere che:

1) se l'orologio A è sincrono con l'orologio B, anche l'orologio B sarà sincrono con l'orologio A;

2) se l'orologio A e' sincrono con l'orologio B e con l'orologio C, anche gli orologi B e C saranno sincroni tra loro;

3) quanto detto equivale ad aver ammesso che il rapporto esistente tra l'intero tragitto percorso dall'immagine della telecamera per andare da A a B e tornare da B ad A ed il tempo complessivo $t_3 - t_1$ necessario a coprire questo tragitto ci fornisce la velocità c della luce:

$$c = \frac{2 \cdot \overline{AB}}{t_3 - t_1}$$

E' evidente che, per il principio di relatività, le cose che abbiamo detto si applicano esattamente allo stesso modo per la sincronizzazione di due orologi che si trovano in due luoghi A' e B' di un sistema S' in moto relativo uniforme rispetto ad S.

Ritorniamo al sistema S. Il fatto che in esso si possano sincronizzare due orologi ci permette di dire che è possibile parlare di eventi simultanei in S. Se cioè nei luoghi A e B di S si producono due eventi, essi saranno simultanei, per un osservatore situato nel luogo C (che si trova a metà strada tra A e B), quando egli vede sui suoi televisori l'immagine dell'orologio A e quella dell'orologio B segnare lo stesso tempo.

Stiamo parlando di eventi simultanei. La cosiddetta simultaneità sembra un concetto non solo innocuo ma anche ovvio. Eppure si faccia molta attenzione ad esso.

Fino ad ora abbiano visto che per un osservatore su S si può parlare di eventi simultanei su S a patto di disporre di orologi sincronizzati.

Dato il principio di relatività, un osservatore che si trovi in un luogo C', a metà strada tra due luoghi A' e B' di un sistema S', potrà allo stesso modo parlare di eventi simultanei su S' (a patto, anche qui, che si disponga di orologi sincronizzati).

Si osservi che l'analisi che siamo andati sviluppando è quanto si poteva ricavare da semplici conoscenze di meccanica classica: il principio di relatività cinematico e dinamico lo si conosceva dai tempi di Galileo; il fatto che la luce viaggi a velocità finita lo si sapeva dai tempi di Roemer; la costanza di c in tragitti di andata e ritorno era comune alle varie teorie elettromagnetiche nell'ipotesi di trovarsi in sistemi di riferimento in riposo rispetto all'etere. La novità è nello sviluppare concetti che nell'ambito della meccanica non erano mai stati portati a compimento ed in particolare nell'introduzione degli *osservatori* dentro i fenomeni fisici (prima di Einstein, infatti, per parlare di eventi simultanei in due luoghi distanti A e B si sarebbe semplicemente detto di *eventi che hanno luogo quando le lancette degli orologi che si trovano nei due luoghi segnano la stessa ora*, senza che qualcuno pensasse di rilevare direttamente questo sincronismo).

LA RELATIVITA' DELLA SIMULTANEITA'

Consideriamo i due riferimenti S ed S' in moto relativo (rettilineo ed uniforme) l'uno rispetto all'altro. Ammettiamo, al solito, che S sia in quiete rispetto a noi e che S' si muova con velocità v rispetto ad S. Per fissare le idee, supponiamo che S' sia un vagone di un treno al cui centro si trovi un osservatore T', ed S il marciapiede di una stazione su cui si trovi un osservatore T (figura 2. Sia poi: L una lampada che si trovi esattamente al centro del vagone; A' e B' le due pareti contrapposte, nel senso della lunghezza del vagone; A e B due lampade poste sul marciapiede della stazione ed equidistanti da T.

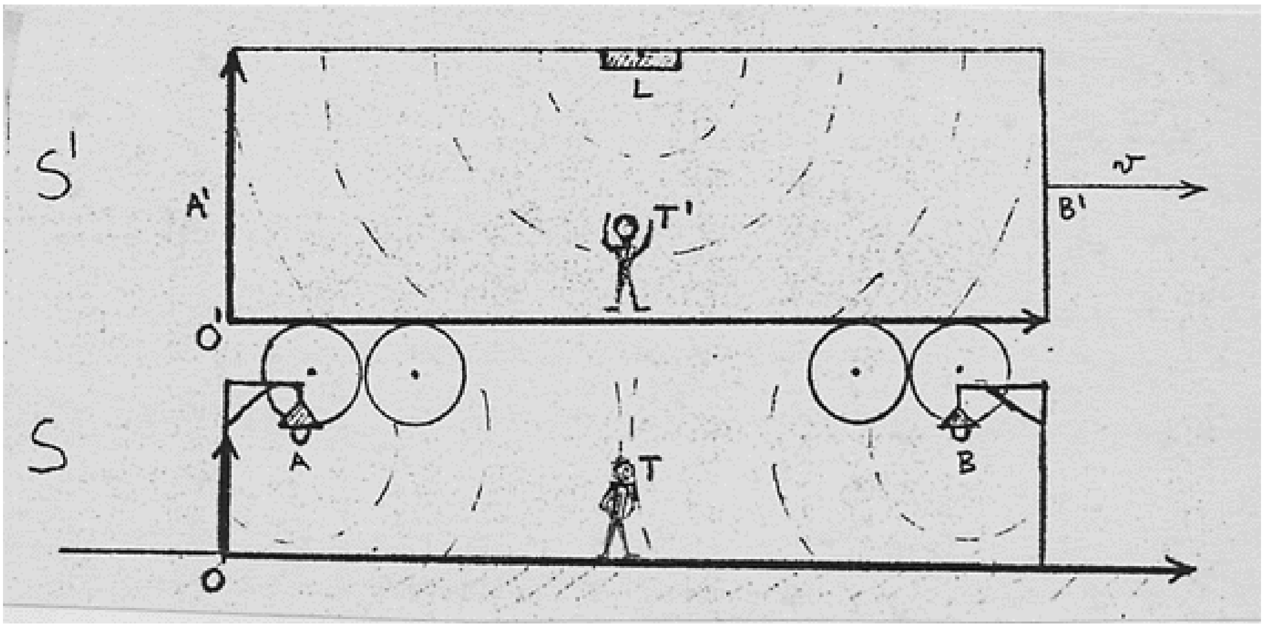

Figura 2

All'istante t = t' = 0, in cui iniziamo a considerare la situazione, le origini O ed O' dei due sistemi coincidono come mostra la figura e, appunto in questo istante, si accenda la lampada L e le lampade A e B (queste ultime mediante un interruttore azionato da T).

Per quanto abbiamo detto a proposito di eventi simultanei, l'osservatore T, che si trova in S, dirà che l'accensione delle lampade A e B è simultanea (la luce emessa da A gli arriverà simultaneamente alla luce emessa da B); l'osservatore T', che si trova in S' dirà che la luce proveniente dalla lampada L ha illuminato simultaneamente le pareti A' e B' del vagone.

Fermiamoci a quest'ultimo fenomeno, osservato come simultaneo da T', e cerchiamo di descrivere come lo stesso fenomeno è osservato da T.

Per fare ciò occorre introdurre nella sua interezza il principio di costanza della velocità della luce, ricordando che questa, velocità è anche indipendente dalla velocità del corpo emittente (nel nostro caso la lampada L).

Riferiamoci alla figura 3che descrive la situazione ad un tempo $t \neq 0$ e $t' \neq 0$ [(2)].

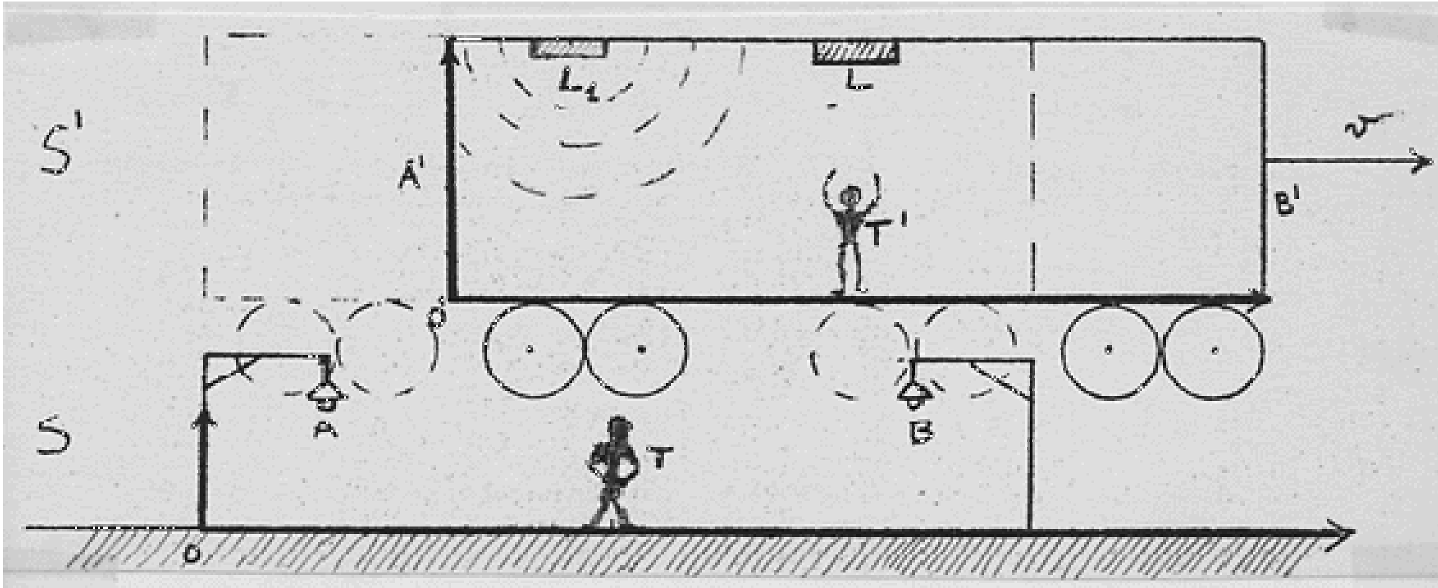

Figura 3

Per T la luce della lampada L è stata emessa quando occupava la posizione L_1 . Data la costanza di c questa luce si propagherà in tutte le direzioni con la stessa velocità indipendentemente dalla velocità della lampada (corpo emittente). Allora T non potrà far altro che osservare l'arrivo di questa luce prima sulla parete A' del vagone e quindi sulla parete B'. E questo perché, mentre la parete A' va incontro alla luce emessa dalla lampada, la parete B' si fa rincorrere dalla luce emessa dalla stessa lampada.

In definitiva, uno stesso fenomeno, percepito come simultaneo dall'osservatore T', non risulta più simultaneo per un osservatore T. Prima però di trarre una conclusione più generale descriviamo come T' osserva il fenomeno che T percepiva come simultaneo (l'accensione delle lampade A e B). Per fare ciò applichiamo il principio di relatività considerando il sistema S' come se fosse in quiete ed il sistema S come se fosse in moto con velocità – v rispetto ad S'. Riferiamoci alla figura 4 che descrive la situazione ad un tempo $t \neq 0$ e $t' \neq 0$.

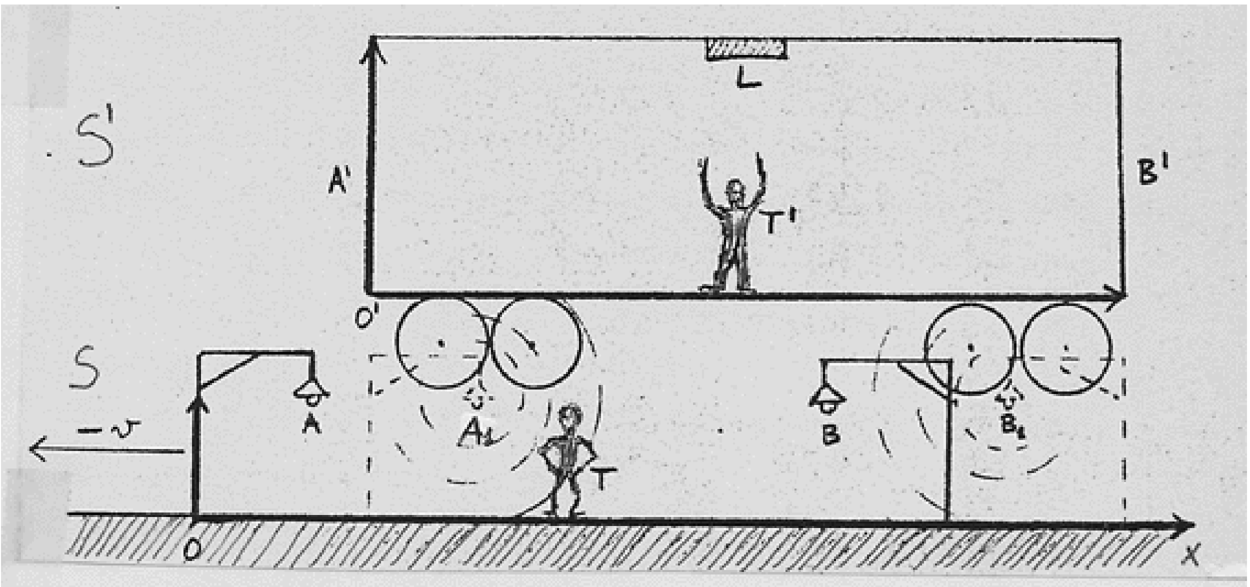

Figura 4

Per T' le luci delle lampade A e B sono state emesse quando esse occupavano rispettivamente le posizioni A_1 e B_1. Anche qui, per il principio di costanza di c, la luce emessa da A e B sarà indipendente dalle velocità di A e B (corpi emittenti). Allora T' non potrà far altro che osservare l'arrivo su T della luce emessa da A prima dell'arrivo della luce emessa da B e dovrà quindi concludere che la lampada A si è accesa prima della lampada B. Anche qui, mentre T si avvicina alla luce emessa da A, si va allontanando dalla luce emessa da B.

Si può allora ancora dire che uno stesso fenomeno percepito come simultaneo dall'osservatore T, non risulta più simultaneo per un osservatore T'.

Più in generale: eventi che risultano simultanei in un dato riferimento, non lo sono più quando sono osservati da un altro riferimento in moto relativo rispetto al primo.

Ed, in accordo con il principio di relatività, c'è perfetta reciprocità (se quest'ultima non ci fosse si sarebbe in grado di riconoscere lo stato di moto o di quiete di un dato sistema).

Quali conseguenze immediate si possono trarre dall'importantissimo risultato della relatività della simultaneità ?

Quando, ad esempio, vogliamo misurare la lunghezza di un'asta confrontandola con un regolo graduato noi facciamo l'ipotesi implicita ma necessaria che gli estremi del regolo debbano coincidere simultaneamente con gli estremi dell'asta da misurare. Ebbene questa operazione di misura per confronto è possibile eseguirla sempre su un dato riferimento nel quale, come abbiamo visto, ha senso parlare di simultaneità. Quando invece dobbiamo operare una tale misura da un sistema di riferimento S ad un sistema di riferimento S', poiché ciò che era simultaneo in S non lo è più in S', le misure dell'asta differiranno da quelle effettuate sull'asta a riposo in un dato riferimento.

Analoghe considerazioni possono essere fatte per misure di tempo.

Ma andiamo a vedere tutto ciò con maggiore dettaglio.

LA RELATIVITA' DEL TEMPO

Cerchiamo di ricavare alcuni risultati come conseguenza diretta di quanto fino ad ora discusso. Più avanti ritorneremo su di essi in un modo più formale.

Riferiamoci ancora all'esempio del vagone e del marciapiede e cerchiamo di seguire uno stesso fenomeno (l'emissione della luce da parte di una lampada) sia dal vagone che dal marciapiede. Per comodità grafica ci sarà utile un disegno nel quale le dimensioni del vagone sono modificate rispetto ai disegni precedenti (figura 5).

Supponiamo che all'istante t =t' = 0 le origini O ed O' dei due riferimenti S ed S' coincidano e che, in questo istante, la lampada L venga accesa. Il fenomeno da misurare è il tempo impiegato dalla luce per andare dalla lampada L all'osservatore T' che si trova sul treno. Lo stesso fenomeno sarà misurato e dall'osservatore T' e dall'osservatore T che si trova sul marciapiede. Vediamo come opera l'osservatore T' .

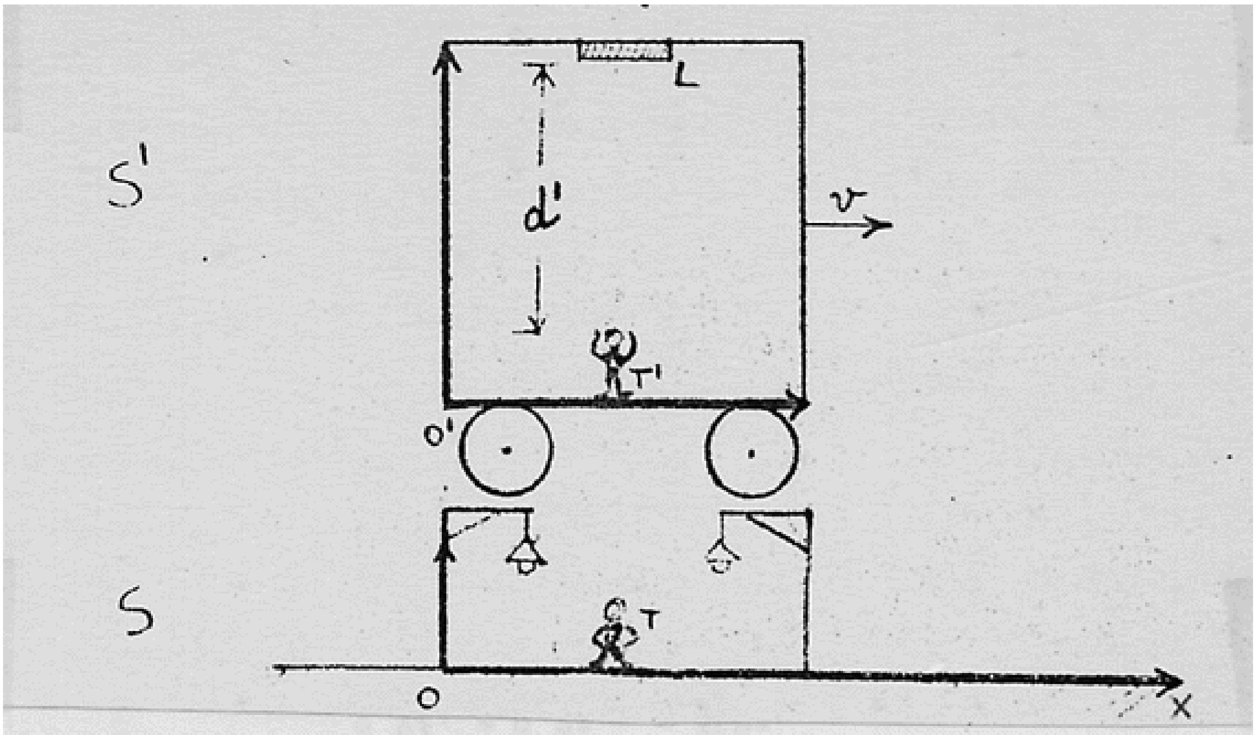

Figura 5

Egli sa che il tragitto che deve percorrere la luce è d' e sa inoltre che la luce viaggia con velocità c. L'osservatore T' si fa un rapido conto con le leggi della meccanica che conosce e, molto facilmente, trova:

$$\Delta t' = d'/c \qquad \rightarrow \qquad d' = c.\ \Delta t'$$

Cosa osserverà T ? Per comprenderlo occorre riferirsi alla figura 6.

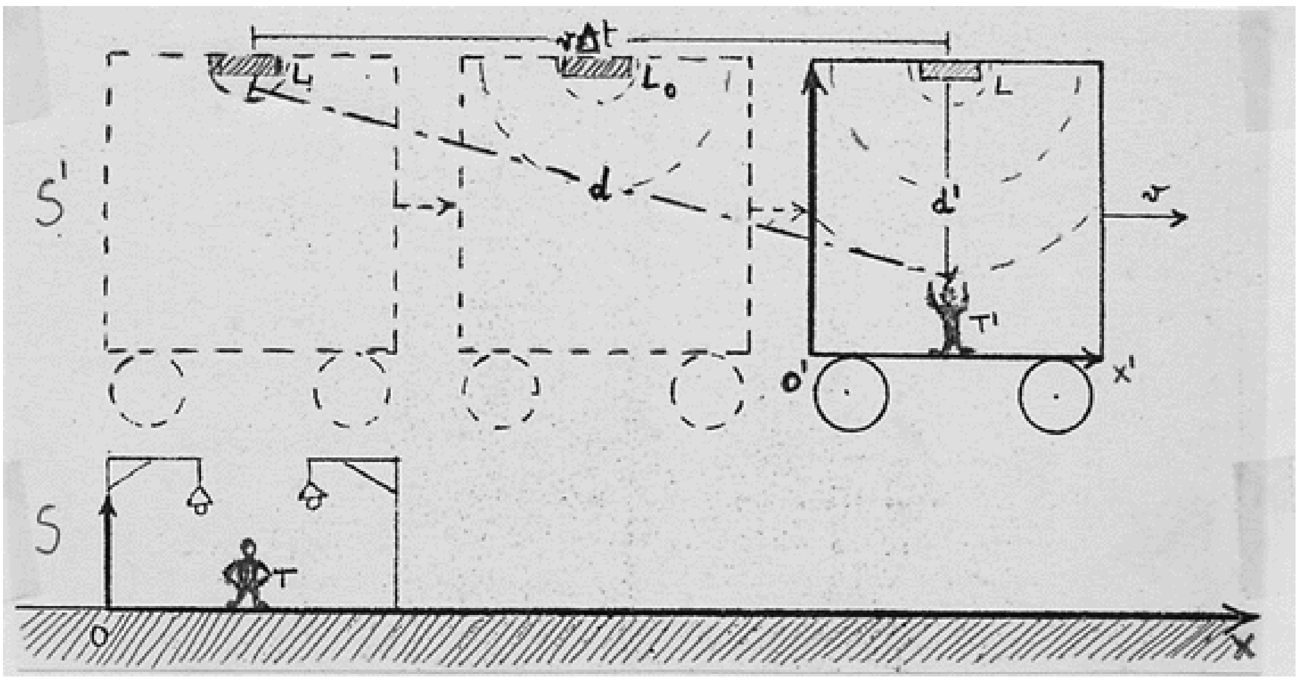

Figura 6

Quando la lampada viene accesa essa occupa la posizione L_1 . Nel tempo Δt che la luce impiega ad andare da L a T', il vagone si sarà mosso con velocità v avendo percorso il tratto v Δt. In definitiva, per T, è come se la luce avesse percorso il tragitto obliquo d. L'osservatore T sa inoltre che la velocità della luce è c. Egli quindi per Δt troverà:

$$\Delta t = d/c \qquad -> \qquad d = c.\Delta t$$

In che relazione stanno Δ t' e Δ t ? Basta considerare il triangolo rettangolo di vertici L_1, L, T', per trovare successivamente (teorema di Pitagora):

$$(LT')^2 = (L_1T')^2 - (L_1L)^2$$

$$d'^2 = d^2 - (v\,\Delta t)^2$$

$$(c\,\Delta t')^2 = (c\,\Delta t)^2 - (v\,\Delta t)^2$$

$$\Delta t'^2 = \Delta t^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

(1)
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Per capire cosa ciò significa occorre discutere il fattore $(1 - v^2/c^2)^{-½}$. La quantità che sta sotto radice è nulla quando v = c . In questo caso, qualunque sia il tempo Δt' che misura T', l'osservatore misurerebbe un tempo Δt infinito. La quantità che sta sotto radice à negativa quando v > c. In questo caso avremmo un numero negativo sotto radice quadrata e quindi un numero immaginario (il tempo Δt sarebbe un tempo matematicamente immaginario e fisicamente privo di significato). Si può senz'altro concludere che, stando alle conoscenze attuali, è impossibile avere velocità v che superino quella c della luce. La radice dà per risultato il numero 1 quando v = 0, quando cioè si ha a che fare con due riferimenti in quiete l'uno relativamente all'altro. In questo caso la (1) diventerebbe Δt = Δt' e torneremmo al caso delle equazioni di trasformazione di Galileo. Più in generale risulta:

$$0 < (1 - v^2/c^2)^{-½} \leq 1$$

e tanto più è alta v, quanto più dal valore 1 ci si avvicina al valore 0. Allora, cosa significa la (1) ?

Il tempo Δt misurato da T risulta maggiore del tempo $\Delta t'$ misurato da T' e ciò vuol dire che il tempo, per l'osservatore T, trascorre più velocemente e, conseguentemente, per l'osservatore T' più lentamente (dilatazione del tempo).

Di quanto $\Delta t'$ è minore di Δt ?

Dipende dalla velocità v con cui S' si sposta rispetto ad S.

Facciamo un esempio numerico per capire l'ordine di grandezza di questa dilatazione del tempo. Consideriamo varie v:

v_1 = 360 Km/h = 0,1 Km/sec -> velocità di un'auto di formula 1

v_2 = 3.600 Km/h = 1 Km/sec -> velocità di un aereo supersonico

v_3 = 36.000 Km/h = 10 Km/sec -> velocità di una astronave

v_4 = 650.000.000 Km/h ≈ 1 80.000 Km/sec -> velocità dell'ordine di grandezza di quella della luce.

Risulta:

$(1 - v_1^2/c^2)^{-½} \approx 0{,}99999999999996$ -> $\Delta t' = 0{,}99999999999996 \; \Delta t$

$(1 - v_2^2/c^2)^{-½} \approx 0{,}\ 999999999996$ -> $\Delta t' = 0{,}999999999996 \; \Delta t$

$(1 - v_3^2/c^2)^{-½} \approx 0{,}9999999996$ -> $\Delta t' = 0{,}9999999996 \; \Delta t$

$(1 - v_4^2/c^2)^{-½} \approx 0{,}8$ -> $\Delta t' = 0{,}8 \; \Delta t$

Si vede subito che nei primi tre casi considerati la dilatazione, che pure esiste, è cosi piccola da risultare praticamente non rilevabile mediante gli strumenti di cui disponiamo. Viaggiando invece ad una velocità dell'ordine di grandezza di quella della luce, quando T misura 10 sec, T' misurerà 8 sec.

E' importante allora osservare che gli effetti di dilatazione del tempo hanno sensibilmente luogo solo per riferimenti in moto relativo con velocità dell'ordine di grandezza di quella della luce.

E' anche importante sottolineare che, per il principio di relatività, vale la reciprocità del fenomeno di dilatazione; poiché l'esempio del vagone e del marciapiede può essere inteso, cose già sappiamo, come vagone in quiete e marciapiede in moto con velocità - v, anche l'osservatore sul vagone vedrà il tempo dilatarsi nel riferimento del marcia- piede.

Avremo modo di tornare a discutere di ciò quando andremo a ritrovare la (1) mediante le trasformazioni di Lorentz e quando ci soffermeremo sul cosiddetto *paradosso dei gemelli*.

LA RELATIVITÀ DELLE LUNGHEZZE

Supponiamo che i nostri due osservatori T e T' vogliano misurare la lunghezza ℓ del vagone su cui si trova T'.

L'osservatore T' opererà nel modo seguente:

- si sceglie come riferimento esterno un palo di sostegno dei cavi elettrici;

- misura quanto tempo $\Delta t'$ è necessario affinché le due estremità del vagone passino attraverso il palo-traguardo di riferimento;

- conoscendo la velocità v del vagone, calcola

$$\ell' = v .\ \Delta t'$$

L'osservatore T opererà nello stesso modo:

- si sceglie anche lui un palo di riferimento;

- misura il tempo Δt necessario affinché le due estremità del vagone passino attraverso il palo-traguardo di riferimento;

- conoscendo la velocità v del vagone, calcola:

$$\ell = v .\ \Delta t$$

Ricordando la (1) e sostituendo il suo valore nella relazione precedente si trova:

$$\ell = \frac{v \cdot \Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

e ricordando che $\ell' = v .\ \Delta t'$, la lunghezza ℓ del vagone misurata da T sarà:

(2) $$\ell = \frac{\ell'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

E ciò vuol dire che misure di lunghezze effettuate da osservatori in moto o in quiete rispetto ad esse forniscono valori differenti. In particolare un'asta rigida, che abbia una data misura di lunghezza quando è misurata in quiete, risulta contratta quando viene misurata in moto da un osservatore in quiete (la contrazione è nel verso del moto, le altre dimensioni non risultando modificate).

Anche qui il principio di relatività assicura la perfetta reciprocità della contrazione per misure effettuate da riferimenti in moto relativo.

LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Consideriamo, al solito, due riferimenti S ed S'. Questa volta tratteremo il problema in modo unidimensionale, cosi come annunciato nell'introduzione, di modo che senz'altro potremo porre y = y' e z = z'.

Riferiamoci alla figura 7.

Figura 7

All'istante t = t' = 0 le origini dei due riferimenti coincidano (O ≡ O') come mostrato in figura 50. A questo istante dall'origine O di S venga emesso un fotone nel verso positivo dell'asse x. Dopo un tempo t ≠ 0 questo fotone si troverà in un punto P di ascissa x = ct.

Anche nel sistema S' il fotone risulta emesso al tempo t = 0 e anche in questo sistema, dopo un tempo $t' \neq 0$, esso si troverà in m punto P' di ascissa x' = ct'.

Poiché la velocità della luce è indipendente dalla velocità del corpo emittente (P ≡ P') possiamo considerare la situazione in figura 8.

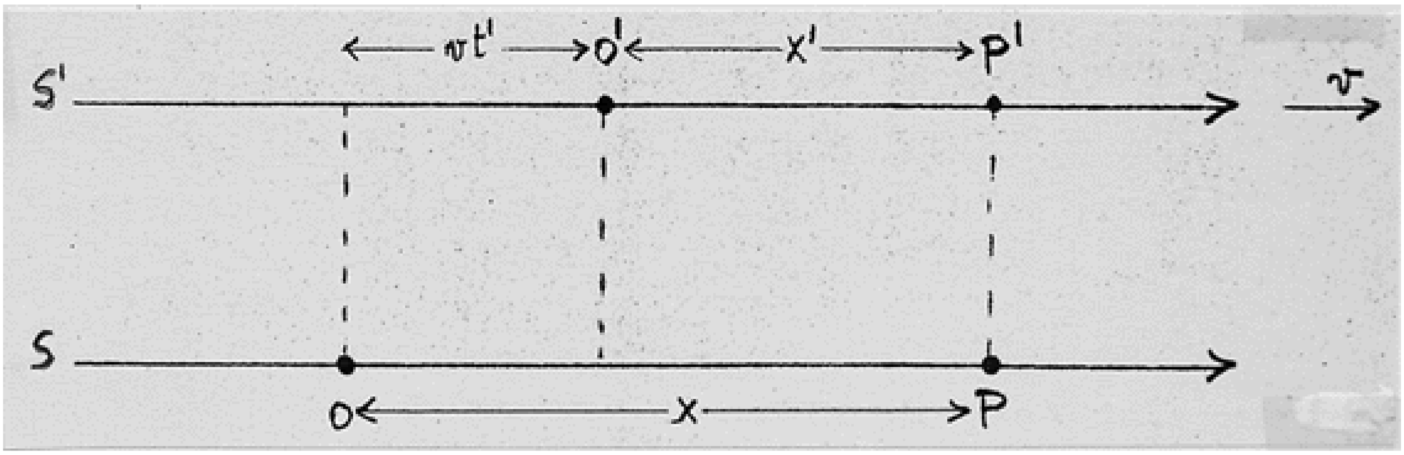

Figura 8

Come descrivono ciò le trasformazioni di Galileo ?

Quali sono le formule che ci permettono di passare dalle coordinate di un riferimento alle coordinate di un altro riferimento ?

Osservando S' da S e ricordando che nelle trasformazioni di Galileo risulta t = t', si ha (figura 8):

$$x' = x - vt$$

Osservando S da S' si ha (figura 8):

$$x = x' + vt'$$

Le trasformazioni di Galileo non tengono però conto della costanza di c. Dovremo allora considerare delle trasformazioni dello stesso tipo, nelle quali bisognerà introdurre un fattore k da determinarsi. Si dovrà cioè avere:

$$x' = k(x - vt)$$

(3)

$$x = k(x' + vt')$$

I motivi per cui si sono scelte queste particolari relazioni sono due:

1) la relazione lineare tra x ed x', essendo la più semplice, è la più spontanea;

2) quando k = 1 si riottengono immediatamente le trasformazioni di Galileo»

A ben guardare questo secondo motivo implica che k deve dipendere dalla velocità in modo tale che, per piccole velocità (v << c), k risulti uguale ad 1. Inoltre, per il principio di relatività, dovrà risultare

$$k(v) = k(-v)$$

che vuol dire reciprocità nell'osservazione da un riferimento all'altro, reciprocità che era garantita dalle trasformazioni di Galileo (scambiando in ciascuna delle due trasformazioni x, x', t, t', v rispettivamente con x', x, t', t, - v, si ottiene ogni volta l'altra equazione).

Per determinare il valore di k, ferma restando la verifica che dovremo fare sulla garanzia di reciprocità k(v) = k(- v) e sul fatto che si deve avere k = 1 per v << c, sviluppiamo le (3) cominciando con l'introdurre in esse i valori già trovati per x ed x' (x = ct; x' = ct'). Si ha:

$$ct' = k(ct - vt)$$

$$ct = k(ct' + vt')$$

e cioè:

$$ct' = k(c - v)t$$

$$ct = k(c + v)t'$$

Moltiplicando membro a membro, si ottiene successivamente:

$$(ct')(ct) = [k(c - v)t][k(c + v)t'] \rightarrow$$

$$c^2t't = k^2t't(c^2 - v^2) \rightarrow$$

$$1 = k^2(1 - v^2/c^2) \rightarrow$$

(4) $$k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ (3)

Si può subito vedere che questo valore di k verifica le due condizioni richieste. E' quindi questo il fattore correttivo da introdurre nelle trasformazioni delle coordinate di Galileo per ottenere le trasformazioni di Lorentz per le coordinate.

Sostituendo la (4) nelle (3) si trova:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(5)

$$x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ritorniamo ora alle (3) e proponiamoci di vedere cosa diventano le trasformazioni di Galileo per il tempo (t = t' e t' = t). Iniziamo con il sostituire alla x' che compare nella seconda delle (3) il valore di x' fornito dalla prima delle (3). Si ha:

$$x = k\,[k(x - vt) + vt'] \quad \rightarrow$$

$$t' = (x - k^2x + k^2vt)/kv \quad \rightarrow$$

$$t' = k\,[t - (x/v)(1 - 1/k^2)] \quad \rightarrow$$

(osservando che $1 - 1/k^2 = 1 - (1 - v^2/c^2) = v^2/c^2$, si ha):

$$t' = k\,[t - (v^2/c^2)x] \quad \rightarrow$$

(6)

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

[Si osservi che alla (6) si può arrivare anche risolvendo il sistema (5) rispetto alla variabile t'].

Con lo stesso procedimento ora visto (ma anche risolvendo il sistema (5) rispetto alla variabile t), sostituendo questa volta alla x che compare nella prima delle (3) il valore fornito dalla seconda delle (3), si trova

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{7}$$

E questa è solo un'ulteriore verifica del principio di relatività. Per ottenere la (7) bastava infatti sostituire nella (6) ai valori t', t, x, v, rispettivamente i valori t, t', x', - v.

Si può subito, anche qui, osservare che per piccole v (v << c) si ottiene subito la trasformazione di Galileo per il tempo (t = t').

Riassumendo, le trasformazioni di Lorentz possono essere così scritte:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(8)

$$x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$y' = y$

$z' = z$

$$t = \frac{t'+\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Il primo gruppo delle (8) si riferisce a misure effettuate da S', il secondo gruppo a misure effettuate da S.

Useremo ora queste equazioni di trasformazione per ricavare alcuni risultati, a partire da quelli, come la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze, già trovati per altra via.

NOTE

(1) I migliori orologi attualmente a nostra disposizione sono i cosiddetti *orologi atomici* il cui principio di funzionamento si basa sull'oscillazione di determinati atomi (cesio) indotta per mezzo di onde elettromagnetiche di frequenza opportunamente scelta (in fase con una delle frequenze proprie dell'atomo stesso in modo da essere in condizione di risonanza). Per una trattazione semplice ed esauriente dell'argomento si veda bibl. 193 e 243. Si noti che disponendo di svariati orologi atomici solo dopo

150.000 anni essi daranno letture differenti in media di un secondo. Questa precisione può essere ulteriormente aumentata costruendo orologi atomici molto più costosi. Si noti infine che quando si parla di orologi identici si sottintende l'espressione *quando sono confrontati in quiete*.

(2) Quanto scritto non è casuale. Non possiamo infatti dire $t = t' \neq 0$ poiché non sappiamo nulla sui tempi t e t' ed in particolare nulla sappiamo sul loro essere o meno uguali. Si ricordi che il criterio di sincronizzazione valeva per un dato riferimento e non per il passaggio da un riferimento ad un altro.

(3) Per la radice abbiamo considerato la sua determinazione positiva perché il segno negativo lascerebbe inalterati i risultati comportando solo una riflessione delle coordinate (un andamento,cioè, simmetrico rispetto all'asse delle velocità v).

Come brevissima appendice, riporto qui una recente notizia sulla "relatività del tempo", tratta da Le Scienze.

07.10.2003

Il tempo è relativo

Un esperimento con ioni di litio fornisce una nuova conferma alla teoria di Einstein

La relatività del tempo, prevista dalla teoria di Einstein, è stata nuovamente confermata, e con una precisione ancora maggiore che in passato. Il concetto di dilatazione temporale spiega come mai la durata di un periodo misurata da due osservatori con orologi identici differisce se uno dei due viaggia a una velocità V non nulla rispetto all'altro: la dilatazione sarà maggiore quanto più V si avvicina alla velocità della luce.
In un esperimento condotto da Gerald Gwinner, Dirk Schwalm e colleghi del Max-Planck-Institut di Fisica Nucleare a Heidelberg, in Germania, gli orologi erano rappresentati da ioni di litio. Gli ioni sono stati bersagliati da raggi laser, provenienti da entrambe le direzioni, che li hanno temporaneamente portati in uno stato eccitato, inducendo fluorescenza. Confrontando le lunghezze d'onda laser di risonanza con quella di transizione di uno ione stazionario, e considerando l'effetto Doppler (l'apparente spostamento della lunghezza d'onda quando la sorgente è in movimento), i ricercatori sono giunti a calcolare il valore della dilatazione temporale.
Nell'esperimento, descritto in un articolo (di Guido Saathoff *et al.*) pubblicato sulla rivista "Physical Review Letters", gli ioni di litio si muovevano a una velocità di 19.000 km/sec, circa il 6,4 per cento della velocità della luce (corrispondente a un'energia di 13,3 MeV, il massimo raggiungibile con il locale anello di accumulazione per ioni pesanti). La nuova misura, con un'incertezza di 2,2 x 10^{-7}, è circa quattro volte più precisa dei valori precedenti.