PARADOSSO DELLA INDECIDIBILITA' E DELLA COERENZA

Il fondamentale teorema di Indecidibilità (o Incompletezza) di Kurt Gödel piò essere considerato come la naturale evoluzione del programma logicista di Frege, Russel-Whithead, Dedekind e Peano.
Il tentativo di considerare la Matematica come un sottoinsieme della Logica, cioè il Logicismo, cresciuto dagli inizi del XX secolo sulla base delle intuizioni e dei lavori di Weierstrass, Helmholtz, Kronecker e Wittgenstein subì una prima ed importante battuta d'arresto quando Bertrand Russel presentò a Frege quello che è oggi noto come il paradosso dell'Insieme di tutti gli Insiemi.
Il secondo colpo potenzialmente mortale alla perfezione logica della Matematica lo si deve a Kurt Gödel che, nel 1931, pubblicò il suo lavoro sulla incompletezza della Matematica avente per titolo: "*Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei Principia Mathematica e di sistemi affini*"; i Principia Mathematica di Bertrand Russel ed Alfred Whitehead sono l'imponente studio volto a conglobare la Matematica nella Logica formale.

DEFINIZIONI
Una osservazione preliminare: nel seguitò verrà impiegato indistintamente il termine Indecidibilità e Incompletezza; di fatto essi sono equivalenti in quanto un sistema che non consenta di dimostrare una proposizione e neppure il suo contrario è un sistema che comporta l'Indecidibilità ed è quindi Incompleto in carenza di un Assioma che elimini tale situazione.

Un sistema formale T è definito Incompleto se ammette una formula φ tale che ne φ ne la sua negazione $\neg\varphi$ siano dimostrabili in T.

Un sistema formale T è definito coerente se non ammette una formula ψ tale che sia ψ che la sua negazione $\neg\psi$ siano dimostrabili in T.
Del tutto specularmente un sistema formale T è definito incoerente (non coerente) se ammette l'esistenza di una formula ψ tale che sia ψ che la sua negazione $\neg\psi$ risultano dimostrabili in T.

TEOREMI
I Teoremi interessati sono in realtà due: Il teorema di indecidibilità che recita (in una versione semplificata (e un poco più comprensibile anche per i non addetti ai lavori) : ***Sia T un sistema formale assiomatizzato, dotato di regole logiche, avente espressività tale da esprimere le proprietà dei Numeri Naturali; se T è coerente allora esiste in T una proposizione φ tale che ne φ ne la sua negazione $\neg\varphi$ sono dimostrabili in T.***

Il Teorema di coerenza che recita: ***Sia T un sistema avente le caratteristiche di cui al I Teorema, allora la sua coerenza non può essere dimostrata in T.***

Anzitutto è interessante notare come il I Teorema (di Indecidibilità) sia soggetto a due condizioni necessarie: la coerenza del sistema T e la sua espressività.
La espressività è resa necessaria per rendere univoco il significato della espressione aritmetica " La formula G non è dimostrabile"; attraverso la attribuzione di un numero primo ad ogni operatore logico, ad ogni funzione proposizionale, ad ogni insieme di funzioni e di operatori, il mastodontico numero rappresentante la proposizione " la formula G non è dimostrabile" ha uno ed un solo significato sulla base della legge fondamentale della Aritmetica secondo cui ogni numero può essere scomposto nei sui fattori primi in uno ed un solo modo.
Alla coerenza di T risponde il II Teorema di Gödel.

Una importante precisazione concernente il II Teorema: la indimostrabilità della coerenza di T non implica necessariamente la sua Incoerenza; essa comporta solo la indimostrabilità della inesistenza (non esistenza) di una formula ψ tale che sia ψ che $\neg\psi$ entrambi dimostrabili in T.
Pur tuttavia la indimostrabilità della inesistenza di ψ impone di analizzare il comportamento di T nel caso (sia pure ipotetico ed improbabile) che ψ esista.

PARADOSSI
Sotto tale ipotesi si presentano due casi:

- se ψ coincide con φ ($\psi \equiv \varphi = \lambda$) si ottiene che ne λ ne $\neg\lambda$ siano dimostrabili in T sulla base del I Teorema ma che sia λ che $\neg\lambda$ potrebbero essere dimostrabili in T sulla base del II Teorema.
- se ψ non coincide con φ ($\psi \neq \varphi$) il I Teorema risulta sia incompleto che incoerente e quindi indimostrabile.