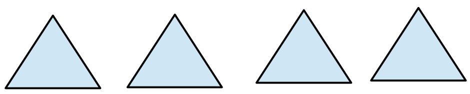
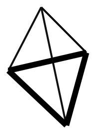
INDETERMINAZIONE DI IPERSOLIDI
CONGETTURA DI NON PROIETTABILITA' DIMENSIONALE

Alberto Sacchi

SINTESI
Analisi del livello di indeterminazione della geometria di solidi n-dimensionali derivanti dalla estrapolazione in R^n di proiezioni n-1 dimensionali dei corrispondenti enti geometrici. Tali estrapolazioni vengono eseguite secondo i 4 metodi più noti.

PREMESSA
Esiste un aneddoto-indovinello attribuito, molto probabilmente erroneamente ad Einstein, dove 4 triangoli equilateri costituiti ognuno da 3 fiammiferi per un totale di 12 fiammiferi vengono affiancati su di un tavolo. Il problema è costruire ancora 4 triangoli equilateri dopo aver eliminato 3 fiammiferi, quindi con i 9 rimasti. La soluzione consiste nel costruire un tetraedro.





Se appare difficile immaginare il trasferimento da uno spazio 2D ad uno 3D come possiamo immaginare uno spazio 4D?
Noi siamo esseri tridimensionali, viviamo in un mondo 3D, vediamo, agiamo, ragioniamo ed immaginiamo secondo la geometria del nostro spazio $R^{3.}$
Solo estrapolazioni matematiche possono dimostrarci l'esistenza di mondi pluridimensionali che, comunque, non potremo mai vedere, immaginare e rappresentare graficamente.
In verità molti sono i tentativi di mostrare l'ombra che un solido 4D può lasciare nel nostro mondo, tentativi che estrapolano caratteristiche proprie di solidi tridimensionali attribuendole ad altri solidi 4D; il problema è stabilire con quale livello di indeterminazione tali "ombre" possono rappresentare veramente un ipersolido.
E se lo Spaziotempo con cui Minkowsky interpretò la Relatività Ristretta di Einstein è reale ed esistente, la IV dimensione non è geometrica (tempo) e non può essere rappresentata graficamente.

La rappresentazione grafica (ovviamente bidimensionale) di solidi quadridimensionali è generalmente ottenuta attraverso un percorso di astrazione logica inversa; cioè si analizza il solido 3D di cui si desidera ottenere il trasporto in 4D proiettandolo in 2D , tale proiezione 2D viene traslata in 3D ed il risultato viene considerato come la proiezione 3D dell' ipersolido corrispondente.
La logica diretta dovrebbe considerare se è possibile, dalle figure 3D ottenute dalla ricostruzione 3D della proiezione 2D di solidi tridimensionali, costruire induttivamente in modo univoco tale figura 3D come la proiezione 3D di solidi quadridimensionali.

NOTA
Il presente scritto tratta di IV dimensione spaziale, tralasciando varietà pluridimensionali dovute a variabili non geometriche; per tale ragione verrà fatto uso pressoché esclusivamente di disegni e proiezioni.

1) INDETERMINAZIONE DELLA GEOMETRIA DI IPERSOLIDI 4D OTTENUTA PER PROIEZIONE
1) Spazi mono/ bidimensionali
Lo spazio unidimensionale può essere rappresentato da un filo teso su cui compare un segmento costituente l'"ombra" di una figura piana 2D.

Essa può essere un quadrato, un triangolo, od una qualsivoglia altra figura piana (in verità anche un qualsiasi solido) che in ogni caso apparirà come un segmento.
La estrapolazione della figura piana di cui il segmento costituisce l'ombra comporta una indeterminazione totale. Oltre che dalla forma geometrica della figura 2D, il segmento proiezione (o quantomeno la sua lunghezza) dipende dal punto di proiezione.

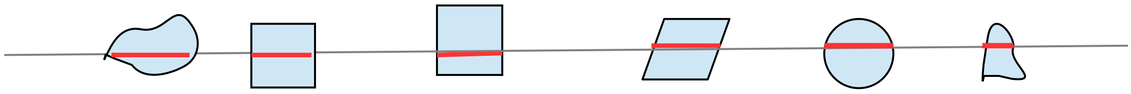
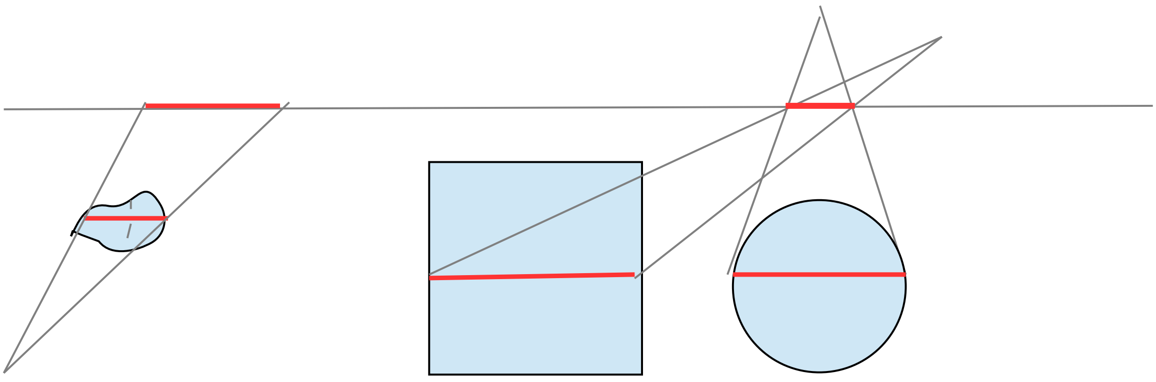


FIG.1.1A

FIG.1.1B

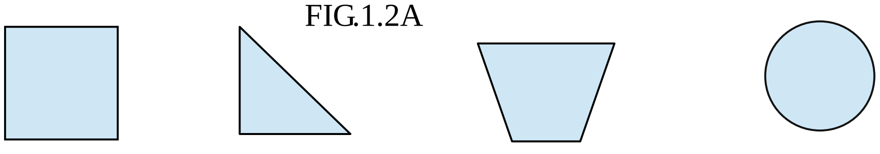


Un osservatore monodimensionale dalla osservazione del segmento 1D (in colore rosso) di FIG. 1.1A non risulta in grado di definire da quale superficie 2D esso possa essere generato.

2) Spazi bi/tridimensionali
Passando alla spazio R^2 cioè un piano, su di esso compaiono le proiezioni di solidi 3D queste possono essere generate da infiniti solidi 3D ognuno dei quali proiettato da un punto diverso.

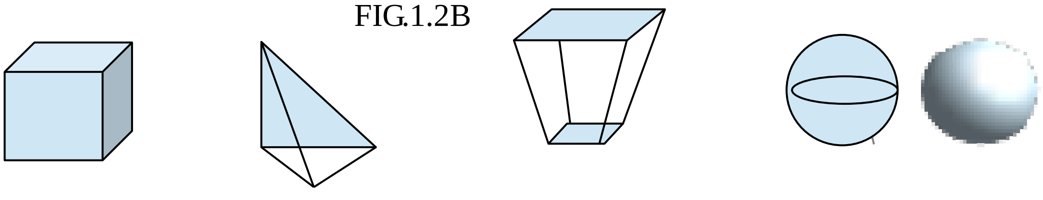
Si consideri un piano (spazio R^2) su cui compaiano alcuni poliedri ed un cerchio.

FIG.1.2A



intesi quali proiezioni 2D di solidi 3D

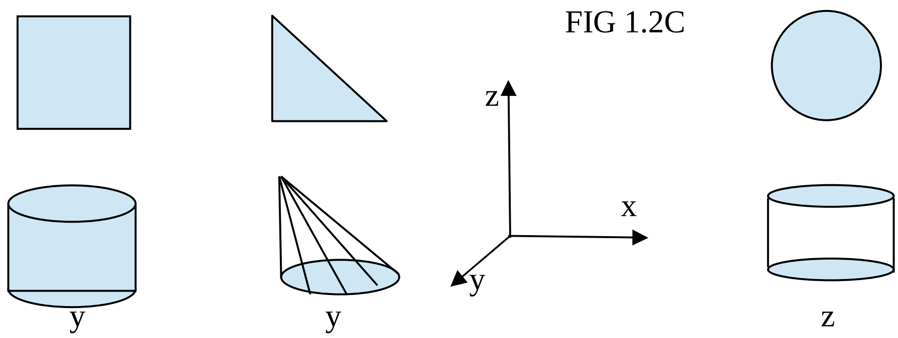
FIG.1.2B



Un osservatore in R^2 dispone unicamente delle figure di cui a FIG.1.2A mentre l'estrapolazione a

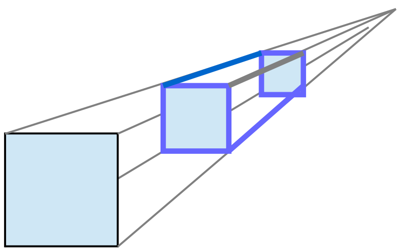
FIG 1. 2B è del tutto arbitraria; infatti le FIG 1.2A possono essere interpretate come proiezioni (ombre) di figure tridimensionali diverse.

FIG 1.2C



Le proiezioni sono ottenute secondo l'asse y e secondo z; addirittura da punti di proiezione differenti si possono ottenere interpretazioni ancora differenti (in FIG. 1. 2D l'interpretazione è un tronco di piramide)

FIG.1.2D



Ne segue che la interpretazione di una proiezione 2D non porta univocamente ad uno ed un solo solido tridimensionale.

3) S*pazi tri/ quadridimensionali*
Nello spazio 3D un osservatore dispone unicamente di solidi 3D e della loro proiezione 2D che viene aprioristicamente convertita in 3D secondo un processo descritto in paragrafo 2) ed illustrato da FIGG.2A e 2B.
Tale ricostruzione viene convenzionalmente considerata come la proiezione di un ipersolido nel nostro spazio tridimensionale.
Esempio tipico lo si ritrova nella costruzione dell'"ombra" di un ipercubo eseguito secondo il processo logico di astrazione inversa
Un cubo proiettato su di un piano da un punto porta ad una figura piana costituita da due quadrati concentrici FIG.3A

FIG.1.3A

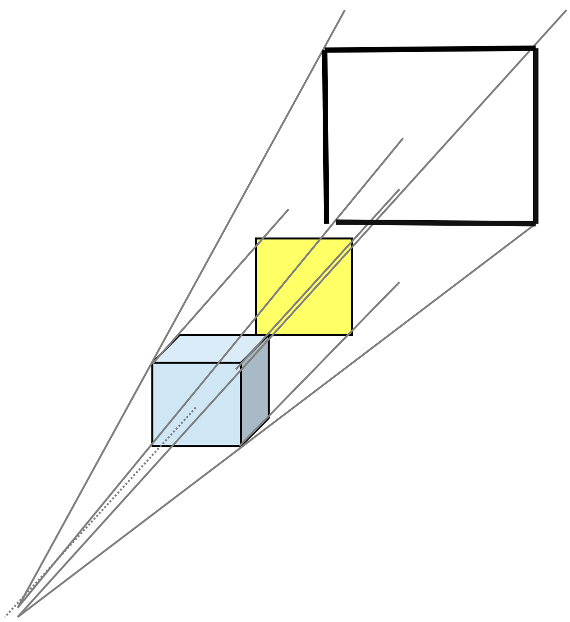
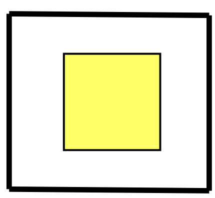


FIG.1.3B

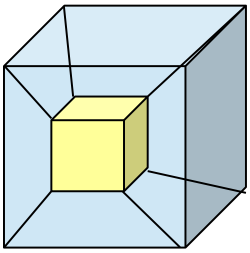


P

La proiezione dal punto P porta al quadrato colore rosso mentre la proiezione da un punto all'infinito porta al quadrato colore giallo (ovviamente identico alla faccia del cubo. FIG.1.3A mostra una vista prospettica della proiezione mentre, trasportandola in R^2 si ottiene FIG.1. 3B.

Ora, sulla base di quanto esposto in paragr. 2 attribuire a FIG. 3B la proiezione di due cubi concentrici è del tutto arbitrario poiché FIG.3B potrebbe essere stata generata dalla proiezione di due cilindri concentrici così come da un tronco di piramide a base quadrata. FIG.2D e FIG.2C.
Ne deriva che la tipica figura della proiezione 3D di un ipercubo è una delle infinite proiezioni possibili

FIG. 1.3C



Naturalmente sono possibili numerose altre interpretazioni del processo di generazione di ombre tridimensionali di ipercubi. Una molto impiegata prevede la proiezione delle 6 facce di un cubo 3D in sequenza predeterminata.

FIG. 1.3D

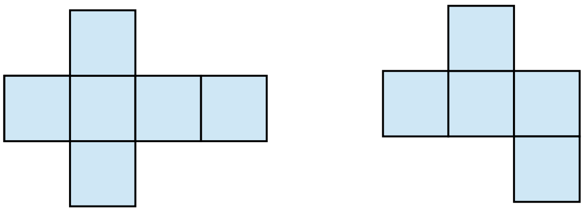
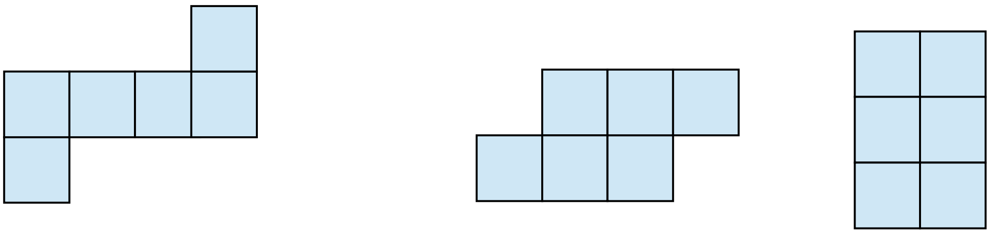


FIG.1. 3F



Le combinazioni possibili sono ovviamente numerose
E questo è il primo livello di indeterminazione.
Il II livello deriva dal presumere che ognuno dei 6 quadrati derivi necessariamente dalla proiezione di un cubo e sia quindi possibile ricostruirlo come in FIG. 3G

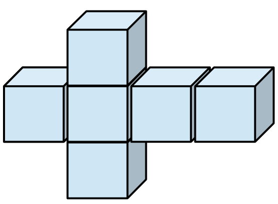


FIG.1.3G derivata da FIG.1.3D

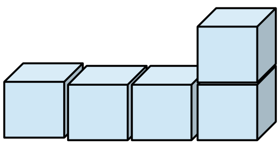
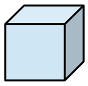


FIG.1.3G derivata da FIG.1.3F



Un osservatore 3D può prendere atto solo delle figure FIG.1. 3 (naturalmente in tutte le possibili combinazioni tridimensionali) e, del tutto arbitrariamente, attribuire a queste lo stato di “ombre” ridimensionali di un ipercubo.

In realtà esse possono essere state generate dalle proiezioni di FIG.1.3D e 1.3F (e similari derivate dalla varia combinazioni dei quadrati 2D) così come da possibili altre combinazioni di solidi tridimensionali quali cilindri o piramidi od ancora da combinazione di altri solidi.

FIG.1.3H

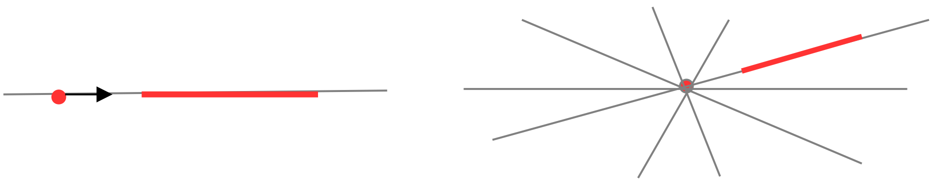
Ne deriva che la proiezione di un ipercubo in R^3 è del tutto indeterminata confermando la impossibilità di concepire o solo immaginarne la forma geometrica.

2) INDETERMINAZIONE DELLA GEOMETRIA DI IPERSOLIDI 4D OTTENUTA PER TRASLAZIONE

Un metodo alternativo per ottenere ipersolidi è quello di traslare solidi tridimensionali in analogia a quanto avviene in R^0 /R^1 o in R^1/R^2.

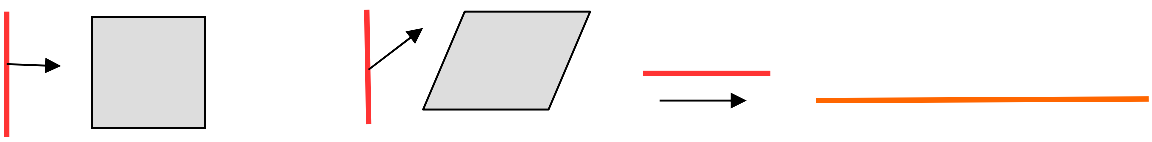
Si consideri un punto materiali di dimensione 0D e di spostarlo linearmente generando una retta (od un segmento di retta per spostamenti limitati) di dimensioni 1D.
Sorge immediatamente un primo problema di indeterminazione generato dalla scelta del tutto arbitraria della direzione della retta di traslazione. Su di un piano R^2 le rette per un punto sono infinite.

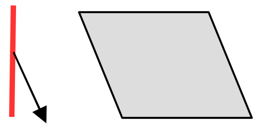
FIG. 2.1



Analogamente un segmento 1D può essere traslato su di un piano secondo infinite direzioni, generando, secondo la direzione di traslazione, figure piane differenti

FIG.2.2A FIG.2.2B FIG.2.2C





Ovviamente la lunghezza stessa del segmento 1D è del tutto arbitraria dando luogo, per traslazione, a superfici di identica forma ma di diversa area.
Analogamente la traslazione di una figura piana può rappresentare diversi solidi in funzione della figura 2D scelta. Un quadrato traslato rappresenta un cubo od un parallelepipedo retto, mentre un parallelogramma può rappresentare un prisma FIG. 2.3

FIG.2.3A

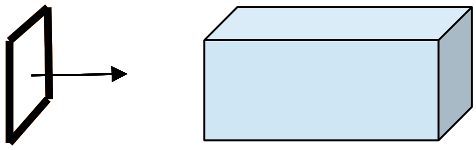
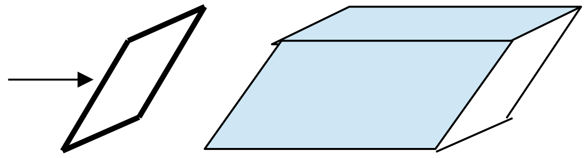


FIG.2.3B



Ora appare evidente come la traslazione parallela di una figura 2D non comporti una univoca figura tridimensionale, dipendendo dalla direzione di traslazione.
L'estrapolazione logica inversa che comporta analizzare figure bidimensionali ottenute da specifici solidi 3D ed applicarla a solidi 3D per passare alla IV dimensione è del tutto arbitraria.

La logica diretta dovrebbe considerare che un osservatore ha a disposizione esclusivamente una serie di solidi 3D che può traslare secondo direzioni arbitrarie ottenendo ulteriori solidi 3D che collegati linearmente vengono considerati come proiezioni 3D di ipersolidi 4D.

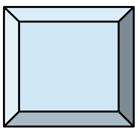


FIG.2.4A

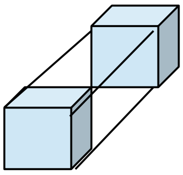


FIG.2.4B

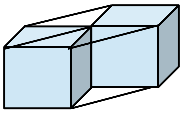
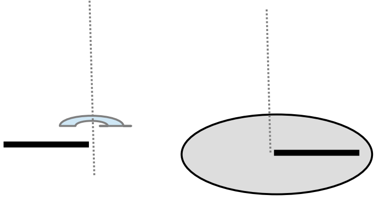


FIG.2.4C

L FIG.2.4A prefigura una variazione di lunghezza del segmento di FIG.2.1 durante la traslazione; in ogni caso le diverse indeterminazioni di dimensione, direzione di traslazione e entità della stessa non consentono una identificazione univoca dell'"ombra" di un ipercubo su di uno spazio 3D.

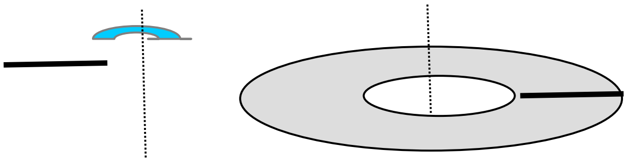
3) INDETERMINAZIONE DELLA GEOMETRIA DI IPERSOLIDI 4D OTTENUTA PER ROTAZIONE

Un segmento monodimensionale (1D) posto in rotazione attorno ad uno dei suoi estremi genera un cerchio FIG.3.1



la figura 2D ottenuta dipende dalla posizione dell'asse di rotazione.

FIG.3.2



Ponendo in rotazione attorno ad una diametro la figura 3.1 si ottiene una sfera mentre per la 3.2 la rotazione genera una sfera cava

FIG:3.3A

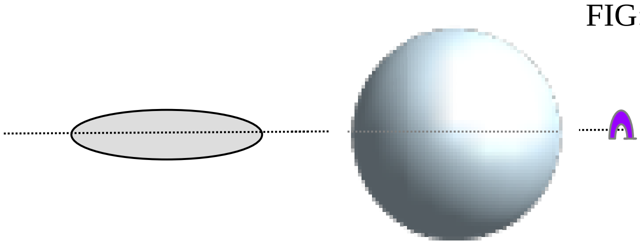
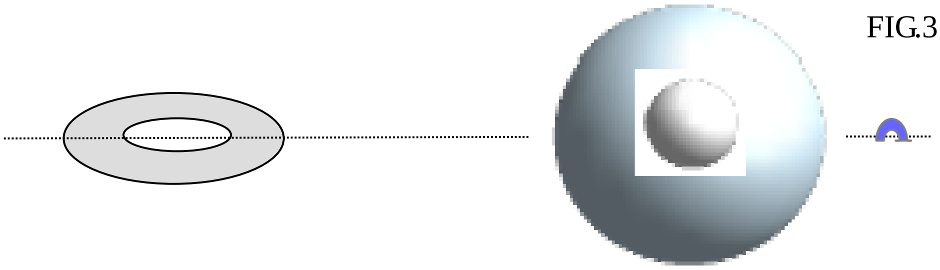
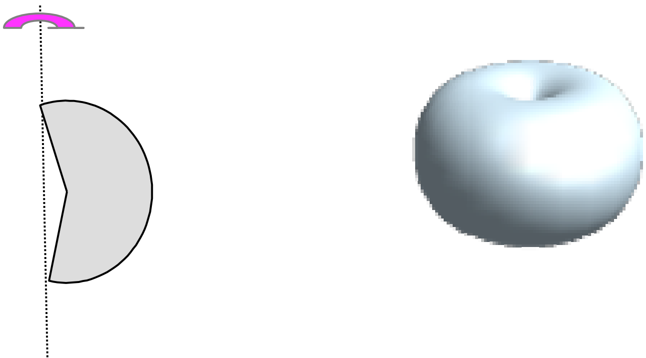


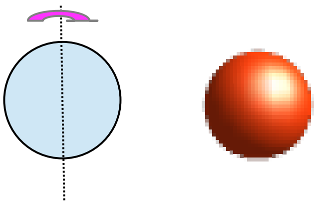
FIG.3.3B

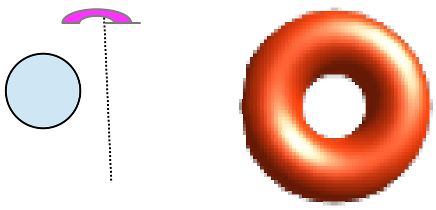


Interessante il caso di rotazione di un settore circolare attorno ad un asse coincidente con un diametro.



Appare evidente che anche la rotazione di un cerchio 2D possa comportare diverse figure 3D che a loro volta, possono rappresentare, poste in rotazione, una proiezione di solidi 4D con una indeterminazione generata dalla posizione dell'asse di rotazione.
Ancora: rotazione di una sfera dipendente dalla posizione dell'asse di rotazione:



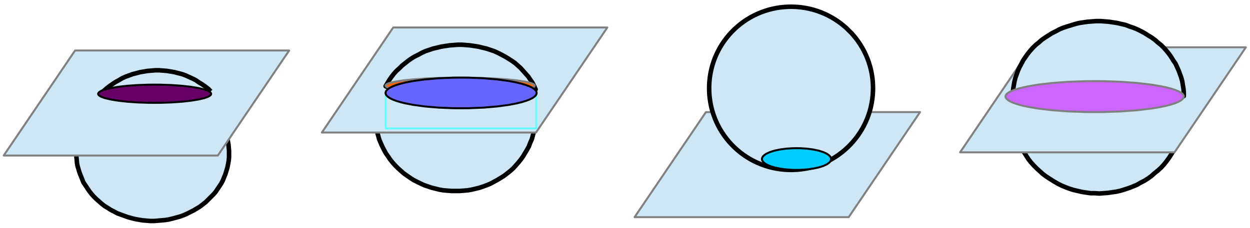


4) INDETERMINAZIONE DELLA GEOMETRIA DI IPERSOLIDI 4D OTTENUTA PER SEZIONAMENTO

Un ulteriore metodo di visualizzazione della proiezione tridimensionale di solidi 4D consiste nell'attribuire al figure tridimensionali ottenute dalla ricostruzione di sezioni di solidi 3D ottenute con piani paralleli.

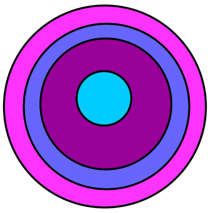
Emblematico il caso di una sfera sezionata da una serie di piani paralleli.

FIG.4.1



Un osservatore 2D potrebbe solo constate il susseguirsi di cerchi concentrici mentre non potrebbe concepire il moto dei vari piani paralleli rispetto ad una sfera (ente 3D che on avrebbe la possibilità di concepire)

FIG.4.2



Peraltro un osservatore 3D osservando FIG.4.2 potrebbe immaginarla come le sezioni successive di un piano rispetto ad una sfera così come quelle di un cono senza possibilità di stabilire univocamente quale delle due alternative sia “vera”.

FIG.4.3

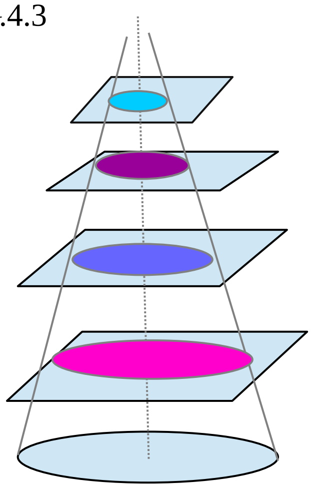
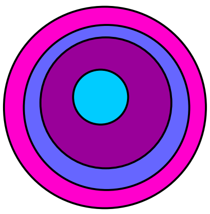


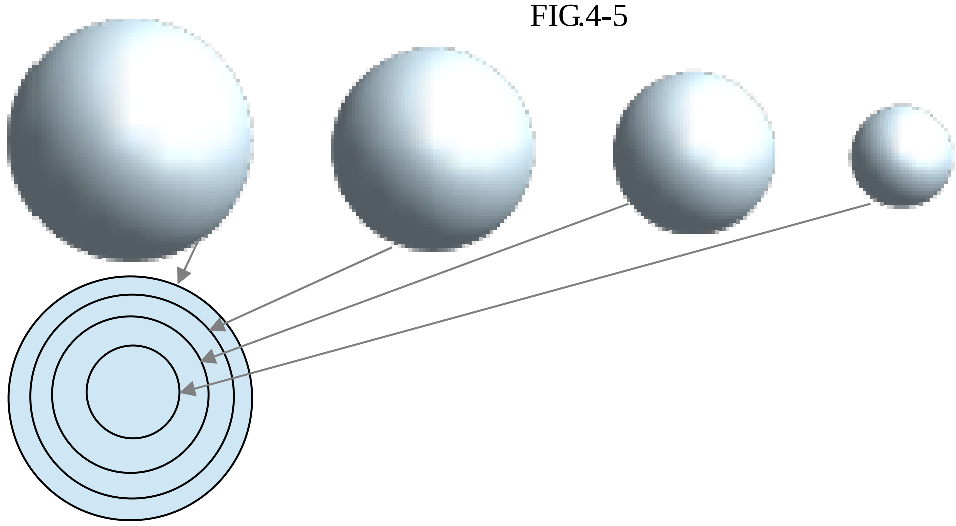
FIG4.4



Naturalmente ammettendo alcune ipotesi alternative quali la costanza della velocità di spostamento dei piani paralleli e, soprattutto operando in R^3, tale osservatore potrebbe eliminare la indecidibilità per via analitica.

Operando con una estrapolazione intuitiva si può estendere il passaggio da R^2 a R^3 (da FIG.4.2 a FIG. 4.1) al passaggio da R^3 a R^4 ottenendo 4 sfere concentriche che devono essere intese come la proiezione tridimensionale di un ipersfera 4D.

FIG.4-5



Il livello di indeterminazione deriva dalla possibilità di interpretare FIG.4.2 come il sezionamento di un cono anziché di una sfera (FIG.3.3 + FIG.3.4)

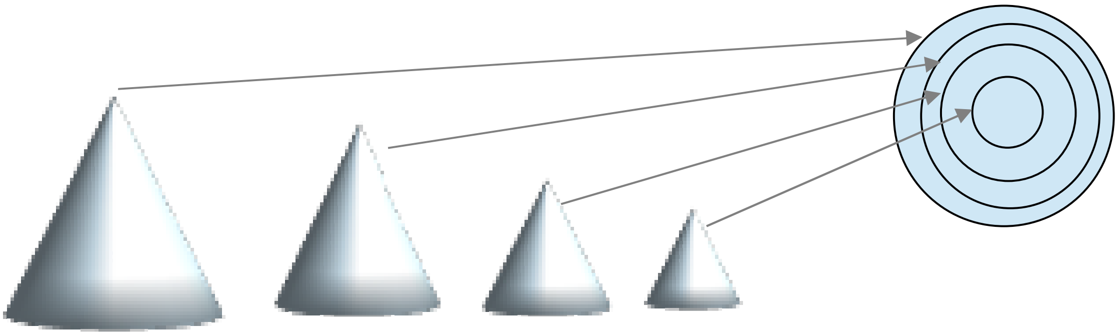


FIG.4.6

Altrettanto può avvenire con il più noto ipercubo che può essere sezionato in diversi modi: con piani paralleli ad una faccia o con piani normali ad una diagonale.

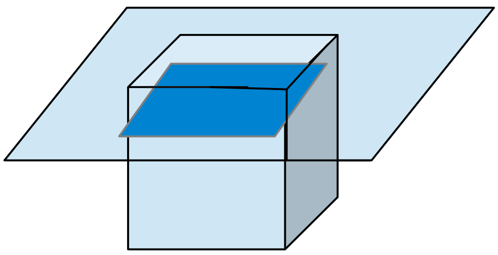


FIG.4.7A

La sezione con piani paralleli ad una faccia portano a quadrati uguali perfettamente sovrapposti

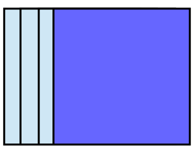
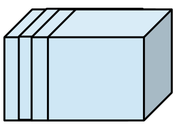
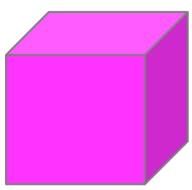


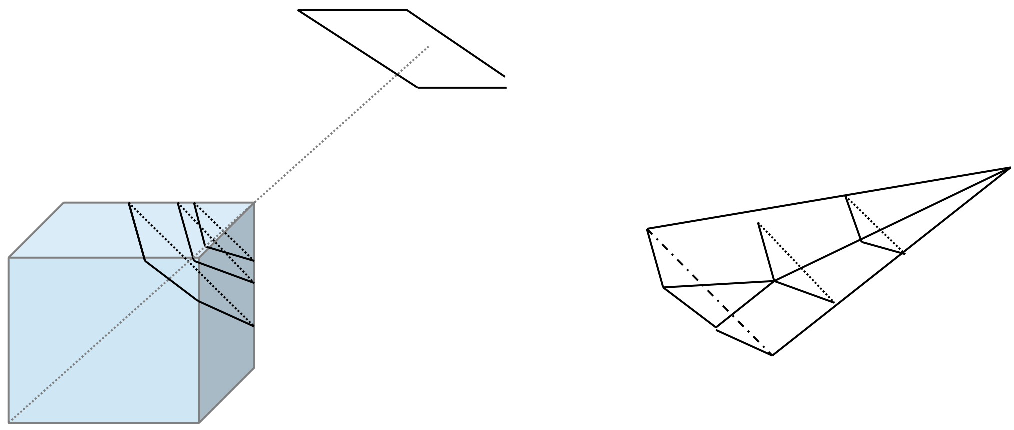
FIG.4.7B

La proiezione 3D di un ipercubo risulterebbe quindi dalla traslazione in 3D della FIG.4,7B. cioè in una serie di cubi sovrapposti.





Per contro la sezione di un cubo con piani tra loro paralleli e normali ad una diagonale del cubo porta ad un solido piramidale a base variabile.



5) CONGETTRA DI NON PROIETTABILITA' DIMENSIONALE

La proiezione di una figura geometrica n-dimensionale in uno spazio a n-1 dimensioni porta ad ottenere la geometria di tale figura in $R^{n-1.}$
I reciproco di tale processo, cioè dalla proiezioni in R^{n-1} dedurre la geometria di un ente n dimensionale comporta indeterminazione; ciò indipendentemente dal processo di proiezione e di successiva estrapolazione.

Sembrerebbe che il passaggio da una dimensione alla dimensione successiva sia impedito da un principio universale.
Naturalmente l'aver analizzato il passaggio da R^1 ad R^2, da R^2 a R^3 e da R^3 ad R^4 secondo 4 diversi criteri di proiezione (o trasferimento) non autorizza ad estendere tale congettura ad ulteriori criteri di proiezione, ad ulteriori dimensioni o a figure geometriche diverse ma, nel contempo, invita ad esporre la seguente Congettura: *non è possibile ottenere in modo univoco la proiezione in R^{n-1} di un ente geometrico a n dimensioni.*

6) CONCLUSIONE

L'universo in cui viviamo è evidentemente tridimensionale e la stesa conformazione mentale degli esseri umani impedisce di immaginare una 4° dimensione spaziale.
Per contro il fatto di poter rappresentare in 2D, cioè di poter disegnare con proiezione ortogonale o prospettica oggetti tridimensionali, porta ad immaginare un processo analogo in cui gli oggetti tridimensionali non siano altro che la proiezione di corrispondenti oggetti 4D. Tale ipotesi è soggetta, comunque ad indeterminazione poiché il medesimo oggetto N dimensionale può portare a a diversi oggetti a N+1 dimensioni.