Alberto Sacchi

L'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER

(Equazione non relativistica)

dr.ing. alberto sacchi
Sviluppo Progetti Avanzati srl
ing.sacchi@alice.it

NOTA

L'Equazione di Schrödinger è sempre stata considerata inavvicinabile non tanto per il suo significato fisico (benché anch'esso sia soggetto a svariate interpretazioni) quanto per il suo complesso formalismo matematico.
Obiettivo del presente scritto è quello di ricavare l'Equazione attraverso un processo algoritmico basato su conoscenze elementari di Analisi Vettoriale, tipiche dei primi anni di una facoltà scientifica.
Benchè esistano infinite pubblicazioni specialistiche sull'argomento, il tentativo di fornirne una adeguata illustrazione con metodi matematicamente semielementari può essere utile per un approccio iniziale.

SINTESI (abstract)

Dalla funzione d'onda di D'Alembert, passando per l'ipotesi di De Broglie ed il principio di Indeterminazione di Heisenberg, viene ricavata l'equazione stazionaria e dinamica di Schrodinger con passaggi elementari di analisi matematica.

From D'Alembert wawe funcion to De Broglie hypothesis and Heisenberg uncertainty principle Schrodinger equation is derived by elementary mathematical analysis steps.

INTRODUZIONE

La Meccanica quantistica **è l'equazione di Schrödinger.**
Il suo significato fisico, il suo significato ontologico, è demandato alle varie interpretazioni, da quella canonica di tipo probabilistico di Bohr (nota come interpretazione di Copenhagen) alla Many Worlds Interpretation di Hugh Everett III, sino alla interpretazione delle "Variabili nascoste " di Albert Einstein.

Da ricordare anche la teoria GRW che, eliminando la linearità dell'Equazione originale di Schrödinger, elimina conseguentemente la sovrapposizione degli effetti cioè la contemporanea esistenza di realtà sovrapposte, nonché la teoria di Wigner nota come "coscienza causa del collasso".

Obiettivo iniziale di Schrödinger è stato quello di fornire una descrizione analitica formale alle proprietà di propagazione delle onde di De Broglie, ipotizzate nel 1923 nell'ambito della Meccanica Ondulatoria.

De Broglie ipotizzò che " ogni corpo in movimento debba essere accompagnato da un'onda (Onda Pilota) e che sia impossibile disgiungere il moto del corpo dalla propagazione dell'onda".

L'onda associata ha lunghezza d'onda correlata alla quantità di moto del corpo stesso secondo la:

$$\lambda = h/mv$$

essendo h la costante di Plack.

$$h = 6{,}62606896 \times 10^{-34}$$

Interessante osservare che l'onda pilota non viene associata esclusivamente a particelle elementari quali elettroni, neutroni o fotoni, bensì anche a corpi materiali macroscopici; essa non è rilevabile a causa di un valore di λ tanto minuscolo da essere praticamente impercettibile qualsiasi sia la strumentazione impiegata.

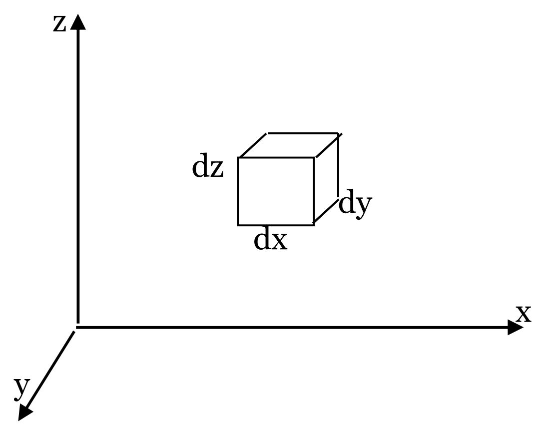
Anche per corpi di massa irrisoria, dell'ordine di pochi mg ed aventi velocità di solo alcuni mm/s, il valore di h rende λ inferiore a qualsiasi possibilità di rilevamento.

Trattandosi di esprimere analiticamente le proprietà di propagazione di un'onda Schrödinger non poteva che prendere avvio dall'equazione generale delle onde (Equazione di D' Alembert) valida per qualsiasi tipo di onda, dal quelle elastiche di una corda vibrante, a quelle acustiche in un mezzo aeriforme od a quelle in un mezzo liquido.

Tale equazione è, con alcuni accorgimenti, applicabile anche alle onde elettromagnetiche. Benché ai tempi di D'Alembert (1717-1783) il problema di propagazione delle onde elettromagnetiche non si fosse ancora posto, successivamente la propagazione nell'Etere giustificò l'applicazione della Equazione d'Onda anche al Campo Elettromagnetico.

L'EQUAZIONE D'ONDA DI D'ALEMBERT

Equazione generale di propagazione di un'onda in uno spazio tridimensionale



Sia dV un elemento differenziale del fluido in cui si propaga l'onda:

$$dV = dx.dy.dz$$

Sia ρ la densità del fluido; la massa dell'elemento dV sarà.

$$dM = \rho dV = \rho.dx.dy.dz$$

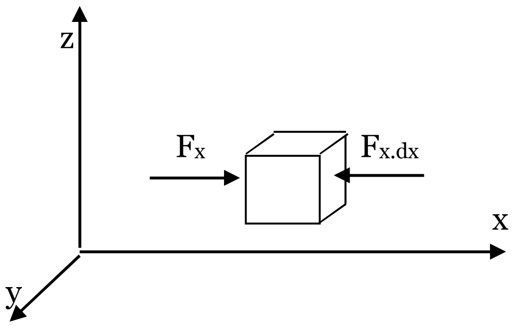
In base alla I equazione della Dinamica newtoniana la forza d'inerzia sarà :

$$dM.accelerazione = dM.\frac{\partial v}{\partial t} = \rho dV.\frac{\partial v}{\partial t} = \boldsymbol{\rho.dx.dy.dz.\ \partial v/\partial t} \qquad (1)$$

essendo v la velocità di dV e t il tempo.

La faccia di ascissa x di dV sia soggetta alla pressione p; la faccia di ascissa x + dx sarà soggetta alla pressione $p + \partial p/\partial x\ .dx$ e le forze che ne derivano saranno:

$$F_x = p.dy.dz$$
$$F_{x+dx} = (p + \partial p/\partial x\ .dx) .dy.dz$$



La forza totale secondo l'asse x sarà:

$(p.dy.dz) -(p + \partial p/\partial x .dx) .dy.dz = (p-p-\partial p/\partial x .dx) dy.dz = \mathbf{- (\partial p/\partial x) .dx.dy.dz}$ (3)

Estendendo il calcolo a tutte e 6 le facce di dV si ha:

(3.1) $\mathbf{F_x+F_y+F_z = - (\partial p_x/\partial x + \partial p_y/\partial y + \partial p_z/\partial z) \, dx.dy.dz}$

(3.1) $\mathbf{F_{tot} = -\nabla p . \; dx.dy.dz}$

essendo

∇ = operatore laplaciano = $\mathbf{(\partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial z)}$

applicabile alla generica funzione f e, nel caso in esame, alla funzione p.

In base al II principio della Dinamica (Azione= Reazione) la $\mathbf{F_{tot}}$ è bilanciata dall'inerzia di dM = ρdV :

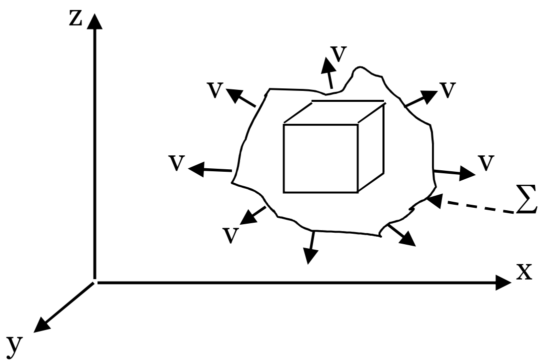
$\mathbf{F_{tot} = -\nabla p . \; dx.dy.dz = dM.a = \rho.dx.dy.dz. \, \partial v/\partial t}$

dM= massa dell'elemento dV

Tale equazione, dopo le ovvie semplificazioni, diviene.

(4) $\mathbf{\rho. \, \partial v/\partial t = -\nabla p}$

Si consideri ora di racchiudere dV entro una superficie (chiusa) ∑



Il flusso del vettore velocità v uscente da ∑ sarà:

$$\int_{\Sigma} v \, d\Sigma$$ flusso = v . superficie (in senso lato: portata= velocità .superficie)

Poiché $\int_{\Sigma} v \, d\Sigma$ rappresenta una portata in volume, $\rho . \int_{\Sigma} v \, d\Sigma$ rappresenta una portata in massa; tale massa uscente da ∑ sarà controbilanciata da una riduzione della densità ρ del volume dV per l'ovvio Principio di conservazione della massa.

(5) $$\rho \int_{\Sigma} \mathbf{v} \, \mathbf{d\Sigma} = - \int_{V} \partial\rho/\partial t \, \mathbf{dV}$$

Per il Teorema della Divergenza (div) , il flusso uscente da ∑ è uguale alla div v ovvero:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{v} \, \mathbf{d\Sigma} = \int_{V} \mathbf{div \, v \, dV}$$

La (5) diviene quindi:

(5.1) $$\rho \int_{V} \mathbf{div \, v \, dV} = - \int_{V} \partial\rho/\partial t \, \mathbf{dV}$$ od anche

$$\rho \int_{V} \mathbf{div \, v \, dV} + \int_{V} \partial\rho/\partial t \, \mathbf{dV} = 0$$ ossia (essendo entrambi gli integrali estesi al volume V)

(5.2) $$\int_{V} (\mathbf{div} \, \rho \mathbf{v} + \partial\rho/\partial t) \, \mathbf{dV} = 0$$

Affinché l'integrale soprascritto sia sempre nullo deve essere **div ρv + ∂ρ/∂t = 0** ossia:

(6) $$\mathbf{div} \, \rho \mathbf{v} = - \partial\rho/\partial t$$

Le due equazioni fondamentali sono, quindi:

(4) $\boldsymbol{\rho .\ \partial v/\partial t = -\nabla p}$

(6) $\boldsymbol{\mathrm{div}\ \rho v = -\ \partial\rho/\partial t}$

E' noto che:

$\partial p/\partial\rho = c^2$ (vedere nota a fine capitolo)
essendo c la velocità di propagazione dell'onda ; quindi $\partial\rho = \partial p/c^2$.

Sostituendo nella (6) a $\partial\rho$ il rapporto $\partial p/c^2$ si ottiene:

(6.1) $\boldsymbol{\mathrm{div}\ \rho v = - 1/c^2\, \partial p/\partial t}$ od anche
(6.1) $\boldsymbol{\partial p/\partial t = - c^2.\ \mathrm{div}\ \rho v}$

Si definisca ora " potenziale del vettore velocità v" la funzione $\nabla\Phi$ = **v** (v è ovviamente un vettore benché ciò non venga evidenziato con apposito simbolo di sovrasegnatura per semplicità grafica).

Dopo le relative sostituzioni la (4) diviene (4.2) e la (6.1) diviene la (6.2)

(4.2) $\boldsymbol{\rho .\ \partial (\nabla\Phi)/ \partial t = -\nabla p}$

(6.2) $\boldsymbol{\partial p/\partial t = - c^2.\ \mathrm{div}\ (\rho \nabla\Phi)}$

Tali equazioni sono scrivibili anche come**:**

(4.3) $\boldsymbol{\rho \nabla\ \partial\Phi/\partial t = - \nabla p}$ (infatti ∇ deriva Φ solo rispetto alle coordinate spaziali a cui viene aggiunta la derivata temporale)

(6.3) $\boldsymbol{\partial p/\partial t = -\rho c^2\ \mathrm{div}\ \nabla\Phi = - \rho\, c^2 \nabla^2 \Phi}$ (essendo ρ una costante)

Infatti sia div che ∇ sono operatori analoghi cioè: $\partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial z$ che applicati successivamente comportano una operazione di derivazione seconda.

La (4.3) può essere scritta anche come:

(4.4) $\boldsymbol{\nabla (\rho\ \partial\Phi/\partial t) = \nabla(-p)}$

dove, essendo identiche le due espressioni lo devono essere anche le funzioni derivate, cioè:

$\boldsymbol{\rho\ \partial\Phi/\partial t = -p}$ ovvero

$\boldsymbol{p = - \rho\ \partial\Phi/\partial t}$

Sostituendo nella (6.3) l'espressione di p soprascritta si ottiene:

(6.4) $\boldsymbol{\partial(- \rho\ \partial\Phi/\partial t) /\partial t = = - \rho\, c^2 \nabla^2 \Phi}$

che, dopo semplificazione del coeff. ρ diviene:

$$(*) \qquad \partial^2\Phi/\partial t^2 = c^2 \nabla^2 \Phi \quad \textbf{Equazione di D'Alembert}$$

che scritta per esteso diviene:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)$$

In caso di onda propagatesi secondo l'asse x (onda progressiva monodirezionale) la (*) diviene:

$$(**) \qquad \partial^2\Phi/\partial t^2 = c^2\partial^2\Phi/\partial x^2$$

la soluzione generale di tale equazione è:

$\Phi (x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ dove F e G sono funzioni arbitrarie.

Nel caso di onda monodirezionale progressiva armonica F e G divengono funzioni trigonometriche:

$\Phi (x,t) = A \cos(x+ct) + B \operatorname{sen}(x-ct)$ (Vedere anche NOTA a pag.9)

Derivando due volte la $\Phi (x,t)$ rispetto ad x e rispetto a t si verifica facilmente che le due derivate seconde sono identiche salvo il fattore c^2 .

Più interessante in quanto impiegata in forma adeguata da Schrödinger è la soluzione:

$$\Phi (x,t) = e^{iAx} e^{iBt} = e^{i(Ax + Bt)}$$

$\partial\Phi (x,t)/\partial t = iB e^{i(Ax + Bt)}$ derivata I rispetto a t

$\partial^2\Phi (x,t)/\partial t^2 = - B^2 e^{i(Ax + Bt)} =-B^2\Phi$ derivata II rispetto a t

$\partial\Phi (x,t)/\partial x = iA e^{i(Ax + bt)}$ derivata I rispetto ad x

$\partial^2\Phi (x,t)/\partial x^2 = - A^2 e^{i(Ax + bt)} =- A^2\Phi$ derivata II rispetto ad x

Posto $B^2 = c^2 A^2$ si verifica la (**) cioè $\boldsymbol{\partial^2\Phi/\partial t^2 = c^2\partial^2\Phi/\partial x^2}$ Equazione di D'Alembert per onda progressiva monodirezionale

NOTA: l'analisi dimensionale porta alla verifica della relazione $P/\rho = c^2$. Infatti:
$P = \text{Forza}/m^2 = Kg/ m^2$
$\rho = \text{Massa}/m^3 = Kg/g.\ m^3$
$P/\rho = kg.\ g.m^3/m^2\ Kg = g.m. = m/s^2.\ m = m^2/s^2 = c^2$

L'EQUAZIONE NON RELATIVISTICA DI SCHRODINGER

Le equazioni da cui prende avvio la elaborazione di Schrödinger sono:

- equazione d'onda di D'Alembert (*) pag .7
- equazione di Planck $E = h\upsilon$
- equazione di indeterminazione di Heisemberg $\Delta x . \Delta p \geq h/2$
- equazione di De Broglie $\lambda = h/p$

p = quantità di moto
υ = frequenza
h = costante di Planck
λ = lunghezza d'onda

Per l'ipotesi di DeBroglie circa l'esistenza di un'onda di materia associata ad ogni massa è logico partire dall'equazione di D'Alembert riscritta nella forma:

$$\nabla^2 \Phi = 1/c^2 . \partial^2\Phi/\partial t^2 \quad (*)$$

Schrödinger ipotizza una soluzione immaginaria del tipo:

$$\Phi(x,y,z,t) = e^{-2\pi i\upsilon t}\,\psi(x,y,z) \quad (7.1)$$ (Vedere Nota in calce a pag. 9)

In tale modo la variabile temporale t compare solo ad esponente di e, mentre l a funzione ψ dipende esclusivamente dalle variabili spaziali x,y,z.

La verifica che la (7.1) è soluzione della (*) è facilmente effettuabile per derivazioni successive.
Limitando, per semplicità di calcolo, l'operazione alla variabile x:

$\partial\Phi/\partial x = e^{-2\pi i\upsilon t} . \partial\psi/\partial x$ essendo $e^{-2\pi i\upsilon t}$ una costante in quanto non funzione di x
$\partial^2\Phi/\partial x^2 = e^{-2\pi i\upsilon t} . \partial^2\psi/\partial x^2$ (7.2)

Mentre

$\partial\Phi/\partial t = -2\pi i\upsilon . e^{-2\pi i\upsilon t} . \psi(x,y,z)$
$\partial^2\Phi/\partial t^2 = -4\pi^2\upsilon^2 . e^{-2\pi i\upsilon t} . \psi(x,y,z)$ (7.3)

La (7.2) estesa a tutte e tre le variabili spaziali diventa:

$\partial^2\Phi/\partial x^2\partial y^2\partial z^2 = \nabla^2\Phi = e^{-2\pi i\upsilon t} . \nabla^2\psi$ che, sostituita nella (*) da luogo a:

$\nabla^2\Phi = e^{-2\pi i\upsilon t} . \nabla^2\psi = 1/c^2 . \partial^2\Phi/\partial t^2$ ovvero, essendo

$\partial^2\Phi/\partial t^2 = -4\pi^2\upsilon^2 . e^{-2\pi i\upsilon t} . \psi(x,y,z)$ in base alla (7.3), la (*) diviene:

$$\nabla^2\psi = -1/c^2\, 4\pi^2\upsilon^2\,\psi \quad (7.4)$$

La relazione : $\upsilon = c/\lambda$ comporta che la (7.4) divenga:

$$\nabla^2 \psi = - 1/c^2\, 4\pi^2\upsilon^2\, \psi = -1/c^2 .\, 4\pi^2\, c^2/\lambda^2\psi = - 4\pi^2/\, \lambda^2 .\, \psi \qquad (7.5)$$

la ipotesi di De Broglie è: $\lambda = h/p = h/mv$ ossia $1/\lambda^2 = m^2\, v^2/h^2$ che, sostituita nella (7.5) da luogo a:

$$\nabla^2 \psi = - 4\pi^2/\, m^2v^2/h^2 .\, \psi \qquad (7.6)$$

Ponendo $\hbar^2 = h^2/4\pi^2$ si ottiene:

$$\nabla^2\psi = - 4\pi^2/\, m^2v^2/h^2 .\, 1/4\pi^2\hbar = - m^2v^2/\hbar^2\, .\psi \ (7.6)$$

L'Energia cinetica di una particella elementare sarà :

$E_c = ½\ mv^2 = ½\ .\ m/m.\ mv^2 = (½m)\ .\ m^2v^2$ ovvero.
$m^2v^2 = 2m\ E_c$
relazione che sostituita nella (7.6) da luogo a

$$\nabla^2\psi = - 2m\ E_c/\hbar^2 \quad (\bullet)$$ **equazione di Schrödinger per stati stazionari**

Naturalmente, per semplicità espositiva, l'energia totale della particelle si è considerato consistesse esclusivamente in Energia Cinetica, eliminando la componente Energia Potenziale che, agli effetti dell'aspetto formale, non cambia la (●) .

La equazione di Schrödinger variabile nel tempo , cioè la evoluzione temporale della ψ, Schrödinger ipotizza che la ψ(x,y,z,t) possa venire espressa dalla relazione:

$$\Phi\ (x,y,z,t) = e^{-i\, E\, t/\hbar}\ \psi(x,y,z) \quad (8.7)$$

al fine di separare le variabili spaziali dalla variabile temporale, analogamente a quanto eseguito per la (7.1)

Derivando rispetto al tempo la (8.7) si ottiene:

$$\partial\Phi/\partial t = -iE/\hbar\ .\ e^{-i\, E\, t/\hbar} .\ \psi(x,y,z) \quad (8.8)$$

L'espressione : $e^{-i\, E\, t/\hbar} .\ \psi(x,y,z)$ che compare nella (8.8) è esattamente la (8.7), quindi:

$$\partial\Phi/\partial t = -iE/\hbar .\ \Phi\ (x,y,z,t)$$

Moltiplicando ambo i membri per $i\hbar$ e ricordando che $i^2 = -1$ si ottiene :

$$i\hbar .\ \partial\Phi/\partial t = E\ \ \Phi\ (x,y,z,t) \qquad (8.9)$$

Ora la (●) afferma che.

$$\nabla^2\psi = - 2m\, E_c/\hbar^2 \quad (\bullet) \text{ ovvero anche:}$$

$$E = - \hbar^2 \nabla^2\Phi/ 2m$$

valore di E che, sostituito nella (8.9) porta a:

$$\mathbf{i\hbar.\, \partial\Phi/\partial t = - \hbar^2 \nabla^2\Phi/ 2m \quad (\bullet\bullet)}$$

Equazione di Schrödinger

NOTA

L'ipotesi di cui alla (7.1) deriva da quanto segue:

Per un'onda elettromagnetica monodirezionale (asse x) la:

$$\mathbf{\nabla^2 \Phi = 1/c^2.\partial^2\Phi/\partial t^2} \quad {}^{(*)} \text{ equazione di D'Alembert}$$

diviene:

$$\mathbf{\partial^2\Phi/\partial x^2 = 1/c^2.\partial^2\Phi/\partial t^2} \quad \mathbf{(n1)}$$

la cui soluzione è:

$$\mathbf{\Phi (x,t) = F (x\text{-}ct) + G (x+ct)} \quad \mathbf{(n2)}$$

Si consideri ora la sola onda progressiva (propagantesi secondo il verso positivo dell'asse x) ; in tale caso l'onda regressiva (propagantesi secondo il verso negativo dell'asse x) viene ad annullarsi :
Ciò coincide con il considerare G =0

Sviluppando da F(x-ct) in serie di Fourier e considerando la sola armonica fondamentale, la F(x-ct) diviene:

$$\mathbf{\Phi (x,t) = \cos (kx\text{-}\omega t)} \quad \mathbf{(n3)}$$

con k = vettore d'onda (indicante la direzione di propagazione) e
$\omega = 2\pi\upsilon$
υ = frequenza

Tenuto conto della formula di Eulero e della rappresentazione vettoriale dei Numeri Complessi , la (n3) diviene:

$$\mathbf{\Phi (x,t) = e^{i(kx-\omega t)}} \quad \mathbf{(n4)} \quad \text{ossia anche:}$$

$$\mathbf{\Phi\ (x,t) = e^{ikx} . e^{-i\omega t}}$$

Ma $\omega = 2\pi\upsilon$ quindi.

$$\mathbf{\Phi\ (x,t) = e^{ikx}. e^{-i2\pi\upsilon t}} \quad (n5)$$

In tale modo si sono potute separare le variabili spaziali (x) da quelle temporali (t).

La soluzione fisica della Φ (x,t) prevede di considerare la sola componente reale delle variabili spaziali (cioè di e^{ikx}) che, di conseguenza, può venire rappresentata da una funzione $\psi(x)$.

Generalizzando sulle tre variabili spaziali si ottiene:

$$\mathbf{\Phi\ (x,y,z,t) = e^{-2\pi i\upsilon t}\ \psi\ (x,y,z)} \quad \mathbf{(7.1)}$$

cioè la soluzione ipotizzata da Schrödinger.

AUTOFUNZIONI ED AUTOVALORI

Sia Γ un operatore funzionale (cioè una serie codificata di operazioni che, applicate ad una funzione, la trasformino in una funzione identica (caso B) od in una funzione diversa (caso A)).

Sono operatori funzionali: $\sqrt{}$;$\int$; ∂/∂; ecc.

Sono esempi tipici del caso A ,$\sqrt{}$; sen; cos; ecc. Infatti sia $\Gamma = \sqrt{}$ ed $F= x^3$; si ha $\sqrt{x^3} = x^{3/2}$ dove $x^{3/2} \neq x^3$ oppure sia $A = \partial/\partial x$ e $F = x^3$, si ha $\partial x^3/\partial x = 3\ x^2 \neq x^3$

Sono esempi tipici del caso B : $\int$; ∂/∂; ecc. Infatti sia $\Gamma = \partial/\partial x$ e $F = e^{x;}$ si ha che $\partial e^x/\partial x = e^x$ dove Γ x F = F

Nel caso in cui si abbia che Operatore x F = k F la funzione F è definita Autofunzione rispetto all'operatore Γ ed il fattore moltiplicativo k è definito Autovalore.

Si consideri ora:
Operatore hamiltoniano = $i\hbar.\ \partial/\partial t$
Funzione F = $\Phi\ (x,y,z,t) = e^{-i\,E\,t/\hbar}\ \psi(x,y,z)$ (8.7)
La funzione F non è altro che la soluzione dell'Equazione di Schrodinger

Applicando l'Operatore $\Gamma = i\hbar.\ \partial/\partial t$ a $e^{-i\,E\,t/\hbar}\ \psi(x,y,z)$ si ottiene :

$i\hbar.\ \partial\{ e^{-i\,E\,t/\hbar}\ \psi(x,y,z) \}/\partial t = i\hbar.\ -iE/\hbar\ \ \psi(x,y,z)\ .\ e^{-i\,E\,t/\hbar}$.

Ritornando alla (8.7) ed applicando l'operatore ad entrambi i membri si ottiene.

$$\Gamma(\Phi) = i\hbar . -iE/\hbar \boxed{\psi(x,y,z) . e^{-i E t/\hbar}}$$

Semplificando gli elementi comuni ed osservando che la funzione racchiusa nel rettangolo rappresenta ancora Φ e ricordando che $-i^2 = 1$

$\Gamma(\Phi) = E\,\Phi$

Ciò significa che Φ è un'autofunzione e che E = energia è l'autovalore di Φ.

BIBLIOGRAFIA

- Lev D. Landau, Evgenij M. Lifshits, *Fisica teorica 2 - Teoria dei campi*, Roma, Editori Riuniti Edizioni Mir, 1976
- L. D. Landau e E. M. Lifsits *Meccanica Quantistica* (Editori Riuniti, Roma, 1978
- Michael Reed, Barry Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1 Functional Analysis*, 2ª ed., San Diego, California, Academic press inc., 1980
- De Broglie *La mécanique ondulatoire*. Parigi: Gauthier-Villars, 1928