

Dalla dinamica newtoniana alla meccanica di Lagrange

Considerazioni epistemologiche sui problemi posti dalla dinamica newtoniana e sulla filosofia finalistica di Lagrange.

dr.ing. Alberto Sacchi
Sviluppo Progetti Avanzati srl- R&D Dept.
ing.sacchi@alice.it

NOTA

Il presente scritto ha carattere puramente divulgativo e pertanto prescinde da analisi formalmente rigorose dei concetti espressi.

Inoltre, a fronte di una analisi quantitativamente completa delle problematiche epistemologiche poste dalla dinamica newtoniana, non analizza le corrispondenti soluzioni relativistiche in ordine alla immensa e assolutamente completa letteratura esistente sia di tipo tecnico che divulgativo.

SINTESI (abstract)

Analisi critica delle problematiche epistemologiche poste dai Principia che, alla fine del XIX secolo, risultavano ancora irrisolte.

Presentazione elementare della Meccanica lagrangiana con particolare riferimento ai suoi contenuti filosofici di tipo finalistico. Approccio lagrangiano allo studio delle equazioni del moto di sistemi complessi soggetti a vincoli ideali.

Critical analysis of epistemological problems by Principia outstanding at the end of XIX century.

Elementary presentation of Mechanics Lagrangian both for its philosophical finalistic content that as analytical and computational technique in study of complex systems motion equations.

DINAMICA NEWTONIANA (newtonian dynamics)

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica vide la luce nel 1687 a cura della Royal Society ed a spese dell'astronomo Halley.

La profonda rivoluzione culturale prodotta dai Principia è insita nello stretto determinismo delle Leggi della dinamica che, come scrive Laplace ("Saggio sulle

probabilità" (1814) *“Un'intelligenza che per un dato istante conoscesse tutte le forze da cui la natura è animata e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se fosse così vasta da sottoporre questi dati all'analisi, abbraccerebbe in un'unica e medesima formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e quelli del più lieve atomo: nulla sarebbe incerto per essa, e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi.”*

Se alla parola "causalità" si da un significato restrittivo si ottiene un paradigma "deterministico" che vede l'intero universo come un immenso sistema meccanico in cui passato e futuro risultano univocamente fissati. Su tale interpretazione si è andato creando un vivace dibattito filosofico, particolarmente nel corso del XVIII e XIX secolo, collegato all'idea di libero arbitrio, con le evidenti conseguenze di tipo etico che derivano dalla impossibilità di “libera scelta” generata dalla ineluttabilità deterministica.

I Principia, la cui impostazione logica appare di tipo assiomatico, presenta alcune principi sostanzialmente indeterminati:

- A) Prescindendo dalla definizione newtoniana di massa (inerziale) *“.....ricavata dal prodotto della sua densità per il volume”* (Principia Mathematica Philosophiae Naturalis, Capitolo Definizioni, Definizione I) che appare decisamente circolare a fronte della classica definizione di densità, il concetto di massa, quale fattore di proporzionalità tra forza agente ed accelerazione

$$F = ma \quad (1.1)$$

appare anch'esso tautologico quando si definisca la forza come ente fisico generante l'accelerazione **a** su di una massa **m**. Scrive Newton: *“ La forza insita (vis insita) della materia è la disposizione a resistere, per effetto della quale ciascun corpo, per quanto sta in esso, persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme* (Capitolo Definizioni, Definizione III).

Poiché la (1.1) è riferibile a sistemi inerziali, appare necessario definire un protocollo di misura della traiettoria e della variazione di velocità del sistema. La geometria euclidea può rigorosamente stabilire la linearità del moto mentre la costanza (o le variazioni) della velocità possono essere rilevate solo da un altro sistema inerziale, rendendo ancora una volta circolare la definizione di massa (e di sistema inerziale).

- B) A fronte delle problematiche esposte appare logica l'ipotesi dell'esistenza di un Sistema Assoluto: *“ Lo Spazio Assoluto, per sua natura senza relazione con alcunché di esterno, rimane sempre uguale ed immobile; lo spazio relativo è la misura o dimensione mobile dello Spazio Assoluto.....”* (Capitolo Definizioni Scolio II).

Nel tentativo di fornire una dimostrazione fisica alla sua esistenza Newton elabora l'esperimento universalmente noto come “ del secchio rotante”.

“.....Si sospenda un recipiente ad un filo abbastanza lungo, e si agisca con moto circolare continuo sino a che il filo a causa della torsione si indurisce completamente. Si riempia il recipiente con acqua e lo si faccia riposare insieme con l’acqua; lo si muova poi con forza subitanea, in senso contrario, in cerchio; allora, allentando il filo, continuerà a lungo in tale moto. All’inizio la superficie dell’acqua sarà piana, come prima del moto del vaso; e poiché il vaso, comunicata gradualmente la forza all’acqua, fa in modo che anche essa inizi gradualmente a ruotare, l’acqua comincerà a ritirarsi a poco a poco dal centro e salirà verso i lati del vaso formando una figura concava (come io stesso ho sperimentato)e, a causa del moto sempre più accelerato, salirà via via finché, compiendo le sue rivoluzioni interne al vaso in tempi uguali, giacerà nel medesimo in quiete relativa.....All’inizio, quando il moto relativo dell’acqua nel vaso era massimo, quello stesso moto in nessun modo eccitava lo sforzo di allontanamento dall’asse; l’acqua non tendeva alla circonferenza con l’ascendere verso i bordi del vaso, ma rimaneva piana e perciò non era ancora iniziato il vero moto circolare (assoluto).Dopo, diminuito il movimento relativo dell’acqua, la sua ascesa lungo le pareti del vaso, indicava lo sforzo di allontanamento dall’asse del moto,e questo sforzo indicava che il vero moto circolare cresceva continuamente sino al punto massimo in cui l’acqua giaceva in quiete relativa nel vaso.” (Capitolo Definizioni e Assiomi Scolio IV).

L’esperimento newtoniano porta alle seguenti considerazioni:

- 1) Sia A un osservatore solidale con il vaso e ruotante con esso; egli osserverà che all’inizio dell’esperimento la superficie dell’acqua risulterà piana mentre l’acqua stessa gli apparirà rotante con velocità angolare pari a quella del vaso (supposto visto da un sistema esterno allo stesso). La velocità dell’acqua apparirà ad A rallentare progressivamente sino a fermarsi mentre la sua superficie tenderà a divenire un paraboloide di rotazione e rimarrà stabilmente in tale configurazione quando l’acqua apparirà perfettamente immobile.
- 2) Sia B un altro osservatore solidale con l’acqua; a B il vaso apparirà ruotare mentre la superficie dell’acqua risulterà piana e, mentre il moto rotatorio del vaso tenderà a diminuire la superficie tenderà ad un paraboloide che si manterrà stabile sino a quando il vaso apparirà “fermo” a B (in quanto la sua velocità angolare sarà pari a quella del vaso).
- 3) Sia ora C l’osservatore considerato da Newton, solidale con il mondo esterno, cioè con il luogo in cui esso si trova e, conseguentemente, con la Terra. Per C varranno perfettamente le considerazioni sviluppate da Newton.

Da quanto esposto discende la dipendenza della descrizione ed interpretazione dei fenomeni dal moto dell’osservatore e, poiché a Newton erano ben note le considerazioni Galileiane sui moto inerziali, ne discende che l’esperimento del

vaso è valido per l'osservatore C come per ogni osservatore in moto rettilineo uniforme rispetto a C.

(www.fisicamente.net - DA ISAAC NEWTON A ERNST MACH)

Scrivendo E. Mach *“Possiamo fissare il vaso d'acqua di Newton, poi fare girare il cielo delle stelle fisse e provare allora che queste forze di allontanamento non esistono? Questa esperienza è irrealizzabile; questa idea è priva di senso, poiché i due casi sono indiscernibili fra loro nella percezione sensibile. Dunque io considero questi due casi come ne formassero uno solo e la distinzione che ne fa Newton come illusoria”*.

“L'Universo non ci è dato due volte, con la Terra (o l'Universo) in quiete e poi con la Terra (o l'Universo) in moto rotatorio, ma una volta sola con i suoi moti relativi, i soli che siano misurabili.” (E. Mach- La Meccanica nel suo Sviluppo Storico Critico-1883)

GRAVITAZIONE NEWTONIANA (newtonian gravitation)

“Se due corpi S e P, che si attraggono con forze inversamente proporzionali al quadrato della propria mutua distanza.....”

(Libro I. Proposizione LX Teorema XXIII)

“...Infatti è conforme a ragione che le forze, che sono dirette verso i corpi, dipendano dalla natura e dalla quantità di quelli, come avviene nelle calamite....”

(Libro I, Sezione XI, Scolio)

In realtà la Legge di Gravitazione Universale, come è oggi nota, non fu esplicitata da Newton che, allo stato della tecnica sperimentale dell'epoca, poteva esclusivamente paragonare le forze tra loro.

$$\mathbf{F} = G \frac{mM}{r^3} \vec{r} \quad (2.1)$$

Solo 110 anni dopo la pubblicazione dei Principia Henry Cavendish calcolò il valore della costante G utilizzando una bilancia di torsione validando sperimentalmente la Legge newtoniana.

“Le forze attrattive dei corpi ad uguali distanze sono proporzionali alla quantità di materia nei corpi”

“.....alcuni.... borbottano non so che circa le qualità occulte. Sono soliti ciarlare continuamente che la gravità non è altro che un quid occulto e che la cause occulte debbano essere bandite dalla filosofia”

“...Vi sono quelli che affermano la gravità essere preternaturale e la dicono un miracolo continuo. Vogliono perciò che essa sia respinta.....” (Prefazione alla II edizione. Roger Cotes Professore Plumiano di filosofia naturale-Cambridge 1713)

Il problema della rigida proporzionalità tra la massa descritta dalla (1.1) da quella della (2.1) che, su base logica, appartengono a proprietà dei corpi assolutamente diverse (resistenza alla accelerazioni ed attrazione reciproca) è stato lungamente dibattuto nel corso del XVII e XVIII secolo, così come l'azione a distanza e la presenza dell'Etere.

Il problema dell'azione istantanea a distanza, implicitamente contenuto nella (2.1) costituiva un enorme problema ontologico anche per lo stesso Newton che, in una lettera a Benteley scriveva : “ *Non si può comprendere che la materia bruta ed inanimata possa , senza mediazione di qualche altra cosa che non sia materia, agire su altra materia e modificarla senza mutuo contatto a migliaia di miglia di distanza*”

D'altra parte Newton, per sua stessa ammissione, non intendeva spiegare la ragione ultima (ontologica) degli eventi naturali , bensì illustrare matematicamente come essi si verificano. “*Non formulo ipotesi e mi attengo al fatto che la legge descrive come funziona il mondo ma non ne indago i motivi*”

Sino all'avvento della relatività Ristretta (1905) e della Relatività Generale (1916) queste erano le problematiche irrisolte della Fisica Naturale newtoniana alla fine del XIX secolo.

FILOSOFIA FINALISTICA DI LAGRANGE (Lagrangian'S Finalistic Philosophy)

Il concetto aristotelico di “causa finale” che dinamica e gravitazione newtoniana parevano aver escluso dall'area scientifica, mantenevano, ancora nel XVIII secolo, una vaga attrattiva filosofica. I fenomeni naturali, secondo tale concezione, dovevano adempiere a scopi stabiliti da una autorità superiore, scopi che la filosofia finalistica era tenuta ad identificare.

Nella prima metà del XVIII secolo, con una memoria presentata alla Académie Royale des Sciences di Parigi il 15 aprile 1744, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis esponeva la propria teoria che individuava in una variabile definita “ Azione” la grandezza che deve essere resa minima e che, di fatto, costituisce lo scopo ultimo della Natura.

In realtà il Principio di Minima Azione non è nato in ambito meccanico, bensì quale soluzione di un problema di ottica geometrica. Un'asta rigida immersa in due fluidi a densità diversa, appare presentare una rottura ad angolo in corrispondenza della superficie di separazione dei due mezzi.

Il problema, più che ottico è ontologico, concernente la vera natura della luce: corpuscolare secondo Newton o Descartes, ondulatoria per Fresnel e Huygens.

La spiegazione del fenomeno della rifrazione sulla base della velocità di propagazione della luce nei due mezzi, portò Descartes a definire il rapporto tra i seni dell'angolo incidente e rifratto = all'inverso del rapporto tra le corrispondenti velocità di propagazione:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_r}{v_i}$$

nella erronea convinzione che la velocità della luce fosse maggiore nei mezzi maggiormente densi.

Per Descartes il mezzo più denso, frenando viscosamente i rimbalzi dei corpuscoli luminosi, ne aumenta la velocità media ordinata, mentre per Newton è l'attrazione gravitazionale (e quindi la velocità) che aumenta nei mezzi densi.

Lo stesso Leibniz giunse al medesimo risultato, nella stessa erronea convinzione.

Anche per i sostenitori della natura ondulatoria la spiegazione del fenomeno della rifrazione è basata sulla deviazione del fronte d'onda per effetto delle diverse velocità.

Con Maupertuis il problema viene affrontato su basi nettamente diverse, cioè finalistiche.

Se Newton ha individuato quali sono le regole del gioco adottate dalla Natura per governare il grande orologio dell'Universo, Maupertuis con Leibniz Lagrange e Hamilton hanno indagato sulla natura di tali regole e sulla ragione della loro esistenza.

Anche Fermat e Leibniz avevano avanzato ipotesi finalistiche, identificando rispettivamente nel tempo e nella energia cinetica la quantità da minimizzare.

“Azione” per Maupertuis rappresenta la differenza dell' energia cinetica del sistema tra due istanti della sua evoluzione temporale:

$$A = \int_{t_2}^{t_1} 2T(x, x^*, t) dt$$

(Viene adottata la simbologia newtoniana dove : $Df/dt = f^*$)

Naturalmente la definizione di Azione data da Maupertuis comporta, implicitamente, l'adozione della ipotesi corpuscolare della luce, con corpuscoli dotati di massa e quindi di Energia Cinetica.

Eulero, per contro, nel testo *Riflessioni su alcune leggi generali della natura* del 1748, definisce *sforzo* l'integrale temporale dell'opposto dell'energia potenziale V e teorizza sia lo Sforzo la quantità che la Natura rende minima.

$$E = - \int_{t_2}^{t_1} V(x,t) dt$$

La sintesi tra le teorie di Maupertuis ed Eulero è dovuta a Lagrange e, successivamente ad Hamilton.

Definire cosa rappresenti la funzione lagrangiana è relativamente semplice qualora si abbandoni la pretesa di rigore e completezza; essa rappresenta la differenza tra energia cinetica T ed energia potenziale V di un sistema dinamico.

Essa dipende soltanto dal tempo t , dalla posizione q e dalla derivata di quest'ultima rispetto al tempo \dot{q} = velocità. Ciò è dovuto al fatto che tali grandezze permettono di determinare univocamente lo stato meccanico del sistema descritto

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

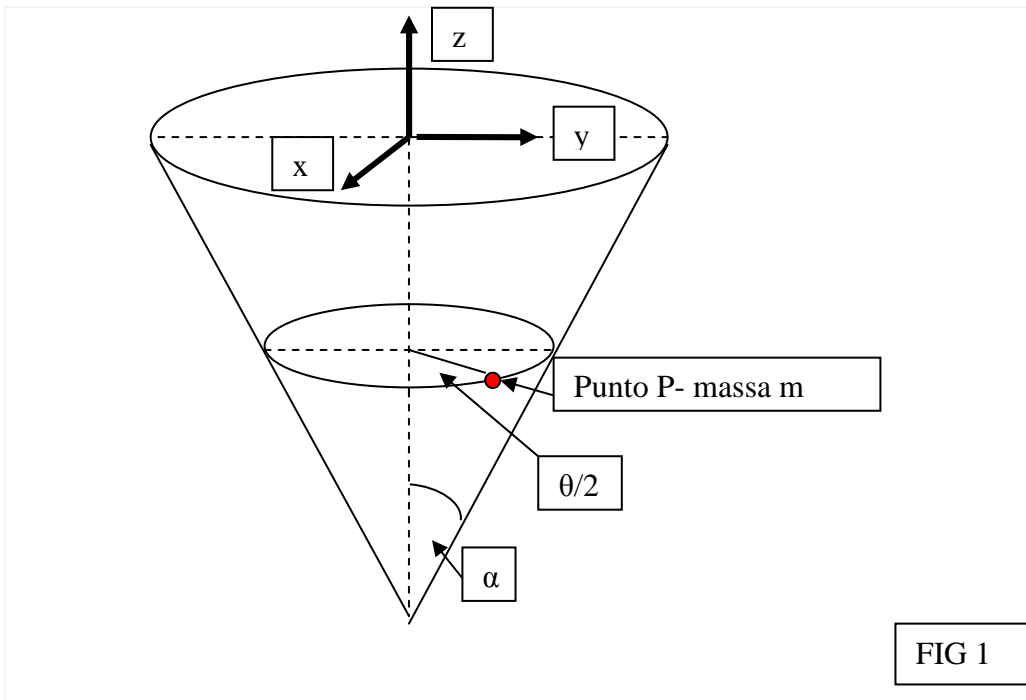
Il Principio variazionale di Hamilton stabilisce che la Natura impone al sistema in esame una evoluzione tale da rendere minimo il funzionale Azione (S), cioè la differenza tra i valori di L in due istanti t_1 e t_2 di tale evoluzione:

$$S_{\text{MIN}} = \int_{t_2}^{t_1} L dt$$

LAGRANGIANA PER SISTEMI SOGGETTI A VINCOLI (reaction forces)

L'aspetto più tecnico sotto il profilo analitico-computazionale del lavoro di Lagrange, consiste nella possibilità di stabilire l'equazione del moto di sistemi dinamici complessi soggetti a vincoli ideali.

E' interessante l'impiego di un esempio per chiarire il metodo di Lagrange



Si consideri il problema della determinazione della equazione del moto di un punto materiale di massa m in caduta libera dal bordo di un contenitore conico.

Il vincolo costituito dalla superficie sulla quale si sviluppa la traiettoria di m si intende ideale (privo di attrito) (FIG 1).

La dinamica newtoniana consente una facile determinazione della equazione del moto di un punto materiale in caduta libera senza vincoli; già Galileo aveva constatato sperimentalmente che la velocità aumentava progressivamente durante il moto ed aveva ipotizzato, in un primo tempo, che essa fosse proporzionale alla distanza percorsa.

$V = K z$ dove k è una costante da determinare mentre z rappresenta la distanza verticale di caduta. In tali condizioni e sotto la definizione di V come derivata prima dello spostamento z ($V = \frac{dz}{dt} = z \cdot$ secondo la simbologia newtoniana) si ottiene:

$$V = dz/dt = z^* = Kz \quad (3.1)$$

L'unica funzione che sia identicamente uguale alla propria derivata prima è notoriamente e^t .

Al tempo zero (m fermo) si otterrebbe:

$$V(t=0) = 0 = K e^0 = K \cdot 1 \quad \text{da cui } K = 0$$

In tali condizioni la (3.1) diverrebbe: $V = 0z = 0$ cioè il punto m risulterebbe costantemente immobile.

A fronte di tale paradosso risulta naturale ipotizzare che v dipenda linearmente dal tempo:

$V = dz/dt = kt$ (3.2) che integrata in t da luogo a:

$$Vt = z = \frac{1}{2}kt^2 + c \quad (3.3) \text{ dove } k = g \text{ accelerazione gravitazionale}$$

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + Z \quad \text{avendo ipotizzato } V(t=0)=0 \text{ e } z(t=0) = Z$$

Questo è quanto scoperto da Galileo e confermato dalla II equazione della Dinamica.

Per applicare la dinamica newtoniana al caso di FIG 1 risulterebbe necessario determinare la componente della azione gravitazionale secondo la traiettoria (a priori ignota) di m .

Per contro, impiegando la meccanica lagrangiana si ottiene (FIG 1):

origine degli assi in O :

$$z(t=0) = 0 \quad V(t=0) = 0 \quad \text{e velocità angolare iniziale} = \dot{\theta}^* = \omega_0$$

$$X(P) = X(z, \theta) = z \tan \alpha \cos \theta + z \tan \alpha \sin \theta + z \quad (3.3)$$

in base ad elementari relazioni trigonometriche.

Essendo α un parametro fisso correlato alla geometria della superficie conica, le uniche variabili relative alla posizione di P sono z e θ .

Derivando la (3.3) si ottengono le componenti della velocità:

$$V(P) = \dot{X}^*(P) = (\dot{z}^* \cos \theta - z \dot{\theta}^* \sin \theta) \tan \alpha + (\dot{z}^* \sin \theta + z \dot{\theta}^* \cos \theta) \tan \alpha + \dot{z}^*$$

E la corrispondente energia cinetica T che risulta essere funzione di $z, \theta, \dot{z}^*, \dot{\theta}^*, t$ (chiamate coordinate generalizzate). Quindi:

$$T(z, \theta, \dot{z}^*, \dot{\theta}^*, t) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (1 + \tan^2 \alpha) \dot{z}^{*2} + \frac{1}{2} m z^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta}^{*2}$$

L'energia potenziale gravitazionale è notoriamente:

$$V(z, \theta) = mgz$$

La funzione lagrangiana è notoriamente definita come la differenza tra Energia Cinetica ed Energia Potenziale:

$$\square \quad L(z, \theta, \dot{z}^*, \dot{\theta}^*, t) = T - V = \frac{1}{2} m (1 + \tan^2 \alpha) \dot{z}^{*2} + \frac{1}{2} m z^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta}^{*2} - mgz$$

Per Hamilton il funzionale Azione è l'integrale tra due istanti t_1 e t_2 dell'evoluzione temporale di $\square (z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}, t)$

$$S = \int_{t_2}^{t_1} \square (z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}, t) dt$$

mentre l'equazione del moto è ottenibile quale minimo della funzione S:

$$z'' - z\theta'^2 \sin^2 \alpha + g \cos^2 \alpha = 0$$

$$\theta'' + z' \theta' / z = 0$$

Non appare questa la sede per illustrare il processo di integrazione del sistema di equazioni differenziali tali da portare a $z(t)$ e $\theta(t)$; è sufficiente ricordare che il teorema di Cauchy–Lipschitz ne garantisce esistenza ed unicità.

BIBLIOGRAFIA (bibliography)

P. Brunet – Etude Historique sul le principe de la moindre action – Paris-Hermann 1936

H. Goldstine – A History of the calculus of variations from 17th through 19th century – N.Y. Spinger 1980

G. Israel – La visione matematica della realtà – Roma – Laterza 1996

R. Renzetti – Massa e Peso - www.fisicamente.net

A. Drago – La riforma della dinamica secondo Leibniz – Hevelius 2003

A. Sacchi – Da Isaac Newton a Ernst Mach – www.fisicamente.net

Applicazioni di meccanica analitica- aero.polimi.it