

Conggettura di indeterminazione nella proiezione di figure geometriche tra spazi n dimensionali

Nota introduttiva

Quando si agitano in uno shaker ben cinque dottrine diverse: psicologia, topologia, gnoseologia, fisica e cosmologia i casi sono due: o si ottiene un risultato di portata universale, al culmine delle capacità umane (ad esempio Philosophiae Naturalis Principia Mathematica); e non è il nostro caso, oppure si ottiene una risma di carta scribacchiata buona al più per accendere il camino; ed anche questo non è il nostro caso; almeno spero.

D'altra parte parlare di Spazi pluridimensionali richiede un pizzico di ognuna delle dottrine elencate.

Spazi a più dimensioni è oggi un argomento di attualità: onde gravitazionali, bosone di Higgs, supersimmetria, canali spaziotemporali; tutti ne hanno sentito parlare ma nessuno (tranne pochi specialisti) ci ha capito qualcosa-

Ed allora cosa c'è di meglio che tentarne una spiegazione catastroficamente (con riferimento al rigore logico-matematico) divulgativa, corredata da tanti bei disegni che, oltre che essere esplicativi, sono anche simpatici. Questo scritto tenta di spiegare come passare da R^2 a R^3 e da R^3 a R^4 senza andare oltre; dimensioni arrotondate a 9 od 11 variabili rischiano di portare il discorso nel caos più totale.

Infine sulla base dei numerosi esempi che mostreranno come sia sì possibile proiettare un oggetto geometrico da una dimensione ad una superiore, ma che il risultato non sia univoco è possibile avanzare una Conggettura di indeterminazione nella proiezione in spazi di ordine superiore-

E se il numero di casi esaminati appare insufficiente per sostenere tale Conggettura, mi auguro che i lettori più attenti ed interessati possano ampliare la casistica: se poi qualche genio riuscirà a fornirne una dimostrazione saremo tutti felici di classificare l'idea come Teorema anziché come Conggettura.

Da R^2 a R^3 - La teoria Gestalt

Si racconta che Albert Einstein, noto sostenitore di determinismo, realismo e localismo dei fenomeni naturali, abbia chiesto a Bohr, paladino della casualità quantistica: “ma tu credi che la Luna esista se nessuno la guarda?”

Parafrasando Einstein potremmo chiederci: “la terza dimensione esiste se nessuno la guarda direttamente?”

Risposta ovvia quanto banale: “certo che esiste, il mio SUV è lungo 4 metri, è alto 1 m e mezzo ed è largo 1,75 “

“E quando lo guardi tu lo vedi lungo, alto e largo?”

“Certamente! Che domande stupide!”

Ed ora abbandonando il ben noto dibattito tra i galileiani Sagredo, Salviati e Simplicio possiamo chiederci:” se il SUV lo guardo in fotografia, posso ancora affermare di vedere le tre dimensioni?” L'immagine fotografica si sviluppa su di una pellicola o su di una lastra, elementi bidimensionali; quindi, dopo un poco di calcoli di ottica geometrica, misurando altezza e lunghezza sulla fotografia posso risalire alle reali dimensioni; ma per la larghezza? La pellicola ha solo due dimensioni e non posso misurare la profondità (larghezza).

Meglio ancora: il disegno di un cubo in prospettiva centrale, visto da una posizione normale ad una faccia, mostra in scala (nota) due dimensioni, quelle della faccia, ma per la terza si limita a mostrare due segmenti convergenti verso un punto all'infinito.
Eppure chiunque riconosce trattarsi di un cubo avente 3 dimensioni; come mai?

La risposta a tale domanda è fornita dalla Teoria Gestalt, sviluppata tra il 20 ed il 30 del 1900 da Max Wertheimer, Wolfgang Köhler e Kurt Koffka.

Si tratta di una teoria psicologica relativa alla rappresentazione della forma e della sua percezione. Il cervello umano tende a elaborare le informazioni sensoriali trasformandole in percezioni secondo regole generali innate ed in particolare in funzione del ricordo di figure simili.

E' qui completamente fuori luogo fornire una panoramica completa di tale teoria mentre è interessante la sua evidenza sperimentale insita nelle figure impossibili bidimensionali che la mente umana non riesce ad elaborare né come bidimensionali, né come tridimensionali (Triangolo di Penrose, Illusione di Ponzo, Cubo di Necker , Sedia di Beuchet, Stanza di Ames, Relativity di Escher, Waterfall di Escher, ecc.) poichè prive di riferimenti precedenti.

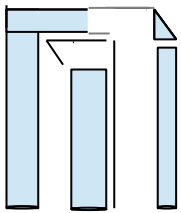


FIG.1a

Colonne

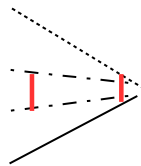


FIG.1b

Illusione di Ponzo

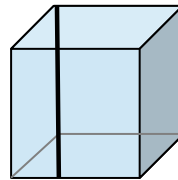


FIG.1c

Cubo di Necker



FIG.1d

Triangolo di Penrose

Di figure “trompe l'oeil” se ne possono riportare infinite; ciò che pare interessante è che qui nessuno intende ingannare l'occhio, ma ingannare il cervello che non ha il programma adatto per interpretare correttamente ed univocamente la figura disegnata in 2D.

Ed ancora se vi è scritto “assolutamente vero” il cervello rielaborerà l'immagine in modo da percepire “assolutamente vero”.

Ed ora vediamo cosa accade alla visione e percezione della III dimensione spaziale .

I segnali sensoriali provenienti da un solido (es. un cubo) sono in realtà emessi dalla sua superficie e vengono recepiti da una superficie (pellicola o lastra fotografica, retina oculare, griglia CCD o CMOS) comunque su di un elemento fotosensibile bidimensionale.

Per la visione diretta le due immagini stroboscopiche sulle retine oculari differiscono di poco, ma tale differenza è sufficiente per fornire alla mente una informazione da elaborare e sintetizzare in un oggetto tridimensionale.

Si presenta ora il problema: la sintesi atta a passare da una immagine 2D ad una 3D è univoca? In altri termini: avendo a disposizione una immagine 2D è sempre possibile ottenere una ed una sola immagine 3D. La risposta è ovvia: dipende dal cervello, dal suo banco di memoria, dalla sua capacità di sintesi e, soprattutto, dal contenuto di informazioni dei segnali fisici provenienti dall'oggetto 2D.

L'ombra lasciata dall'oggetto, l'ombra sull'oggetto, la nitidezza dei dettagli sullo sfondo, la differenza di luminosità, disegni di mascheramento oggetto/sfondo, possono essere segnali utilizzabili per la sintesi percettiva se, in qualche modo sono esistenti anche in 2D.

Le più conosciute figure geometriche piane vengono analizzate nella ottica interpretativa tridimensionale multipla mentre viene rimandata ad un successivo paragrafo la interpretazione tridimensionale di superfici (quindi bidimensionali) curve.

La lettura 3D di una figura 2D viene spesso definita proiezione; in realtà si adotta una tecnica di proiezione assonometrica o prospettica centrale (laterale in qualche caso) dove P è il punto di vista (punto di proiezione adottato)

Visto che siamo esseri tridimensionali e viviamo in un universo 3D il nostro cervello elabora la figura tridimensionale partendo da una visione fisica 2D operando con un ciclo logico inverso; cioè “ come vedremo in 2D quella che sappiamo (immaginiamo) come un solido?”

Conclusione: proiettando un cubo, un parallelepipedo un cono od una cilindro su di piano cosa otterremmo? Invertiamo il verso del ragionamento: partiamo da una figura 2D (quella che i nostri sensi registrano) e risaliamo ai diversi solidi che il nostro cervello potrebbe elaborare da essa.

FIG.2a

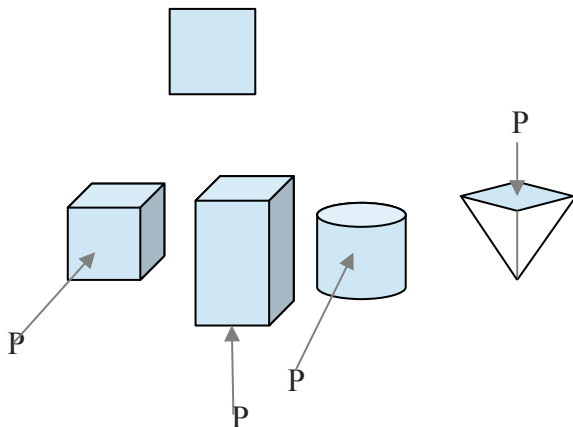


FIG.32b

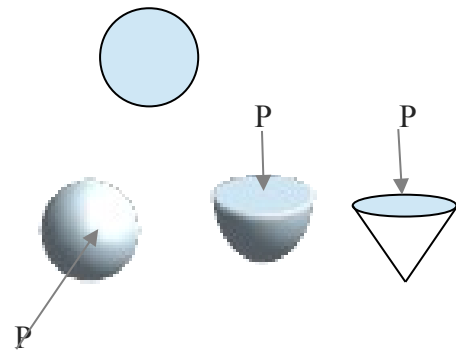


FIG.2c

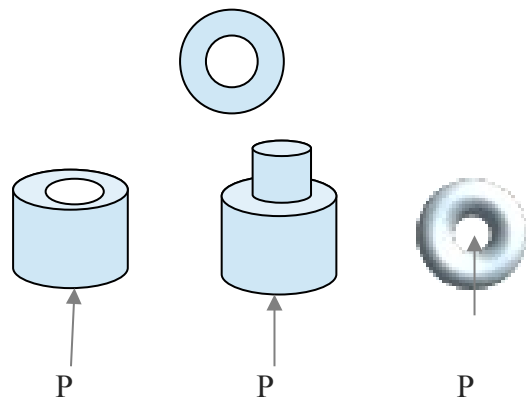
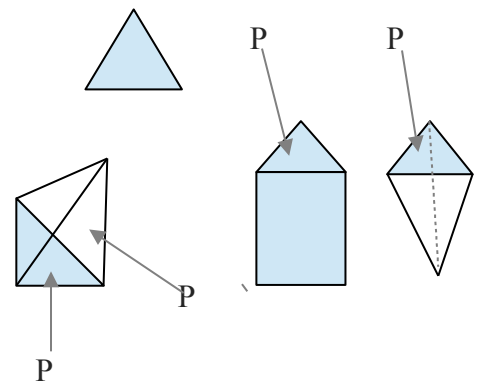


FIG.2d



Da R^2 a R^3 - La topologia differenziale

Una piccola considerazione preliminare (ed anche un poco sciocca) : se l'equazione cartesiana di un cerchio con centro nell'origine degli assi è $x^2 + y^2 \leq R^2$ e quella di una sfera è $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$; se l'equazione di un quadrato è :

$$-L/2 \leq x \leq L/2$$

$$-L/2 \leq y \leq L/2 \quad \text{e quella di un cubo è } -L/2 \leq x \leq L/2$$

$$-L/2 \leq y \leq L/2$$

$$-L/2 \leq z \leq L/2$$

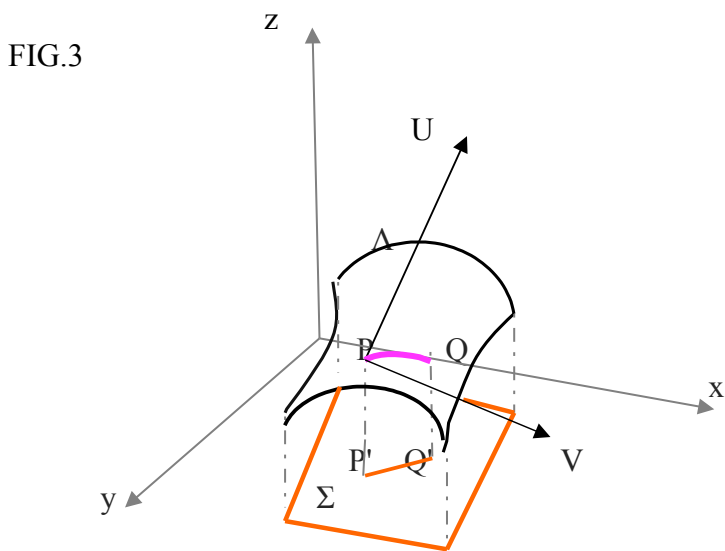
non è per caso sufficiente aggiungere una variabile ed un asse, ad esempio l'asse w per ottenere da una sfera una ipersfera e da un cubo un tesseratto? (Ipercubo).

Sbagliato! Sinora si è vista la proiezione di figure piane da R^2 a R^3 ma cosa accade se la figura bidimensionale R^2 è una superficie curva?

Il problema sta nel fatto che quelle equazioni non sono altro che il Teorema di Pitagora che, su di un piano, funzionano egregiamente, ma su di una superficie curva non funzionano più.

Se si considera una superficie Λ che, come tale è un ente bidimensionale, per identificare un suo punto devono essere sufficienti 2 sole coordinate U e V che giacciono ovviamente su di essa.

Come le vedrebbe allora un essere tridimensionale (cioè riferite ad un sistema ortonormale?)



Ovviamente sul piano dei sensori ottici (retina oculare, lastra fotografica, pellicola, ecc.) verrà rilevata la figura Σ .

Tra le coordinate intrinseche U e V e quelle cartesiane x, y, z esisterà una relazione del tipo:

$$\begin{aligned} x &= f(U, V) \\ y &= m(U, V) \\ z &= h(U, V) \end{aligned} \quad (1.2)$$

dove f, m, h sono equazioni algebriche dipendenti dalla forma di Λ

Se ammettiamo che P e Q siano tanto prossimi da poter confondere PQ con $P'Q'$ il che equivale ad ammettere che in un intorno differenziale di P Λ ed il suo piano tangente in P coincidano, si potrà adottare anche per P e Q il teorema di Pitagora.

$$d(PQ)^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.1)$$

Sia $P(x, y, z)$ sarà $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$

Passando dalla base x, y, z alla base UV , sulla scorta della equazioni parametriche (1.2), si ha:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{(\partial f(U, V))}{(\partial U)} dU + \frac{(\partial f(U, V))}{(\partial V)} dV \\ dy &= \frac{(\partial m(U, V))}{(\partial U)} dU + \frac{(\partial m(U, V))}{(\partial V)} dV \\ dz &= \frac{(\partial h(U, V))}{(\partial U)} dU + \frac{(\partial h(U, V))}{(\partial V)} dV \end{aligned} \quad (1.3)$$

ne segue che, eseguendo i quadrati delle (1.3) i doppi prodotti e raccogliendo i termini simili la (1.1) diviene:

$$ds^2 = [(\partial f/\partial U)^2 + (\partial m/\partial U)^2 + (\partial h/\partial h)^2] dU^2 + 2[\partial f/\partial U\partial V + \partial m/\partial U\partial V + \partial h/\partial U\partial V] dU.dV + [(\partial f/\partial V)^2 + (\partial m/\partial V)^2 + (\partial h/\partial V)^2] dV^2$$

Si ponga ora:

$$\begin{aligned} g_{11} &= (\partial f/\partial U)^2 + (\partial m/\partial U)^2 + (\partial h/\partial h)^2 \\ g_{12} &= g_{21} = \partial f/\partial U\partial V + \partial m/\partial U\partial V + \partial h/\partial U\partial V \\ g_{22} &= (\partial f/\partial V)^2 + (\partial m/\partial V)^2 + (\partial h/\partial V)^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

ottenendo:

$$ds^2 = g_{11} dU^2 + 2g_{12} dU.dV + g_{22} dV^2 \quad (1.5)$$

dove la matrice:

$$(1.6) \quad G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

rappresenta il tensore metrico di Λ .

La (1.2) può assumere la seguente forma:

$$\begin{aligned} x &= X^1 = X^1(x^1, x^2) & \text{dove } X^1 = f \text{ è una funzione di } x^1 = U \text{ e } x^2 = V \\ y &= X^2 = X^2(x^1, x^2) & X^2 = m \text{ è una funzione di } x^1 \text{ e } x^2 \text{ diversa dalla precedente} \\ z &= X^3 = X^3(x^1, x^2) & \text{analogamente alle precedenti espressioni} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Con tale simbolismo si ottiene:

$$\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) dx^j = dX^i \text{ e quindi:} \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2 \quad (1.8)$$

La (1.5) ci dice chiaramente che su di una superficie curva non vale il teorema di Pitagora poiché, oltre ai quadrati dei cateti, l'ipotenusa dipende pure dal loro doppio prodotto.(1.5)

Guardando un quadrato od un rettangolo in 2D la mente tende ad elaborare la corrispondente figura 3D come un cubo, un parallelepipedo od una piramide e solo dopo qualche sforzo passa a riceverlo come una superficie curva.

La ragione è forse che vedendo una forma piana siamo condotti ad adottare una logica strettamente euclidea, Pitagora compreso, che qui non vale più. Ecco allora la preferenza mentale a percepire figure solide in 3D anziché figure bidimensionali curve in uno spazio ambiente tridimensionale.

Da R^3 a R^4

Ma ritorniamo alle tecniche topologiche di proiezione di corpi tridimensionali in spazi a 4 dimensioni. Il processo logico seguito per spazi bi e tri dimensionali prevede di immaginare una serie di solidi che, proiettati da punti di vista diversi e con diverse angolazioni, diano luogo per proiezione alla medesima figura piana; poi invertiamo il processo e partendo da una figura piana risaliamo ai diversi solidi ed alle diverse angolazioni che la hanno generata per estrapolazione mentale.

Il guaio è che qui il giochetto non è valido; dovremmo partire da ipersolidi quadridimensionali e proiettarli in 3D ma come e cosa sia un ipersolido 4D non siamo in grado di immaginare e

tantomeno di proiettarlo.

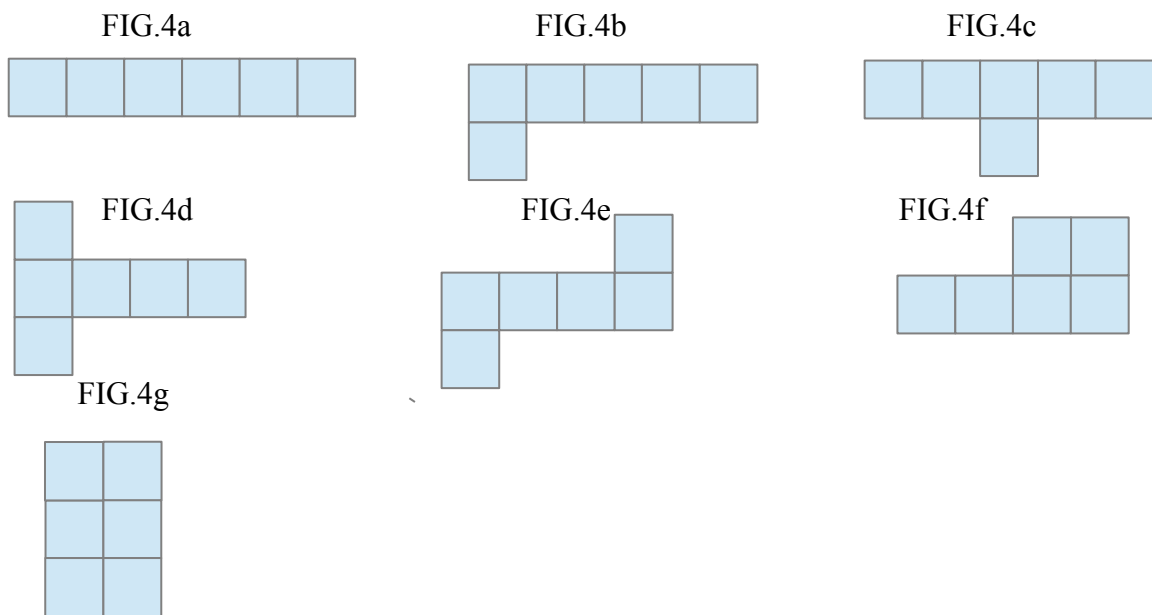
Si è quindi costretti a ritornare al punto di partenza, cioè all'unica figura catturata fisicamente dai sensori ottici (lastra fotografica, retina oculare (vedi NOTA) griglia CCD ecc.).

Ecco allora il cubo, il parallelepipedo, il cilindro o la piramide che ritornano ad essere un quadrato che rappresenta quindi anche il cubo dopo la proiezione in 3D.

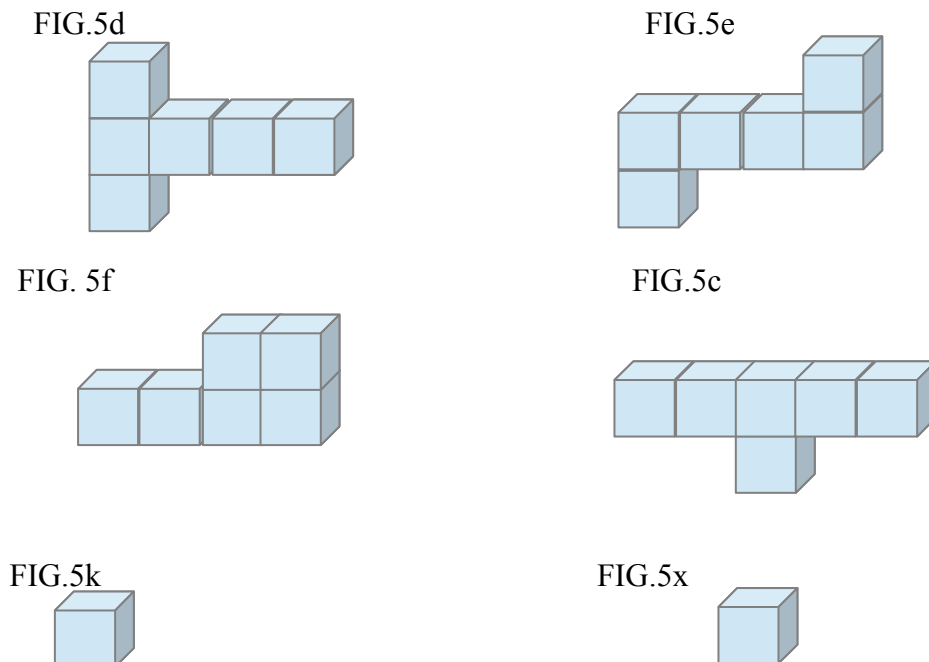
Passare dal quadrato al cubo è ciò che è stato percepito dal cervello per estrapolazione del dato sensoriale (quadrato) ad una dimensione superiore, ma ora trattasi di percorrere il cammino inverso. Partire da un cubo e proiettarlo totalmente in 2D e, poiché esso ha 6 facce, la proiezione porta a 6 quadrati affiancati secondo l'ordine con cui si è proceduto.

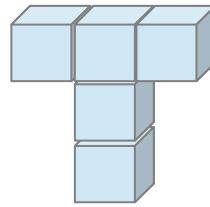
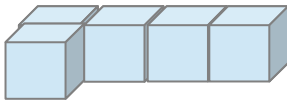
Ecco quante sono le possibilità di "affiancamento" cioè l'ordine di proiezione; esse sono naturalmente $D_{n,k}$ con $n=k$ cioè $n!$ Che, nel caso di 6 elementi, ammontano a ben 120.

Ne vengono mostrate solo alcune per visualizzare il processo



Ora ritorniamo a R^3 ossia percepiamo ognuno dei $120 \cdot 6 = 720$ quadrati come dei cubi ottenendo 120 figure tridimensionali di cui alcune ben note (crocifisso di Picasso) ognuna costituita da 6 cubetti.



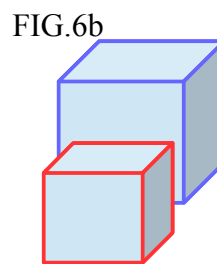
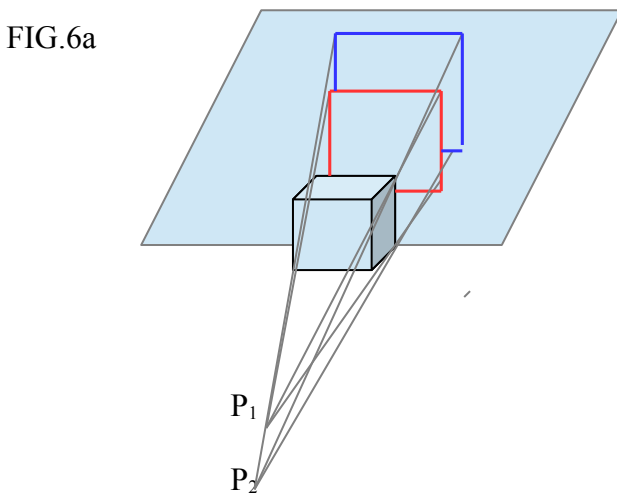


Le 120 figure tridimensionali ottenute dalla disposizione di 720 cubi elementari, ognuno derivato dal cubo oggetto iniziale della trasposizione in 4D, sono generalmente considerate la proiezione tridimensionale di un ipercubo quadridimensionale.

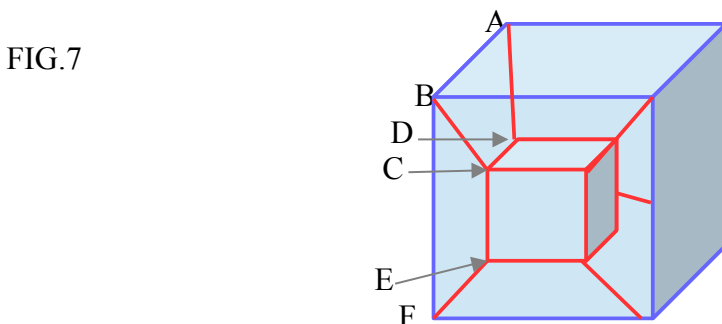
Vi sono anche altri tipi di proiezione 3D di un tesseracto; tutte sfruttano il principio di proiettare un cubo su di un piano bidimensionale da punti di vista diversi e, successivamente ipotizzare come la mente umana possa interpretare (percepire) tale figura in uno spazio 3D.

Il passo successivo è stabilire, del tutto aprioristicamente, che la figura tridimensionale risultante non sia altro che la proiezione 3D di un oggetto 4D

Ad esempio una proiezione ottenuta con una prospettiva centrale porta a due quadrati prima e a due cubi successivamente la cui dimensione è funzione dei rispettivi punti di vista P_1 e P_2



Considerando infine che i quadrati blu e rosso giacciono sullo stesso piano i due cubi risultanti devono giacere nello stesso volume, quindi, essere concentrici FIG.7



Le superfici ABCD , BFEC e le restanti analoghe delimitate dagli spigoli ottenute congiungendo i

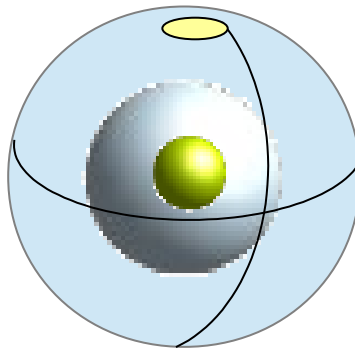
vertici dei due cubi fanno parte del tesseracto che ha pertanto 24 facce, 16 vertici e 32 spigoli.

Ad un solo cubo in uno spazio R^3 possono corrispondere un numero infinito di tesseracti, in funzione della posizione reciproca dei punti di proiezione e del piano proiettivo rispetto al cubo 3D .

Può essere interessante analizzare l'equivalente 4D di una sfera dove la situazione appare più semplice. Il punto di partenza del processo è una sfera tridimensionale che, per le ormai ben chiarite ragioni, viene vista dalla superficie dei fotoricettori come bidimensionale, quindi un cerchio .

In funzione della distanza tra il piano dei fotoricettori e il punto di vista cambia il diametro del cerchio; si possono in tali condizioni ottenere una infinità numerabile di cerchi concentrici la cui trasposizione (percezione) in 3D corrisponde ad una serie infinita di sfere concentriche.

FIG.8



NOTA . Si è assimilato l'organo fotosensibile umano ad una superficie piana, analogamente a quanto avviene per la registrazione ottica su di una superficie fotografica. Ciò che risultava interessante era ed è la bidimensionalità di tali superfici.

In realtà la retina è una superficie bidimensionale a curvatura $1/r^2$ (curvatura gaussiana) ma poiché la zona a massima fotosensibilità su cui si concentra la visione (macula lutea) ha diametro dell'ordine di 1,5 mm essa è assimilabile al piano tangente alla retina in quel punto.

IV dimensione e Relatività generale

Nei paragrafi precedenti si è implicitamente assunta l'ipotesi che la IV dimensione non possa che avere natura spaziale.

La Relatività, sia Ristretta che Generale ammette come IV dimensione il tempo e, poiché questo scritto è volto a rendere “visibili” (almeno la loro ombra in 3D) oggetti tetradimensionali, la Relatività ne verrebbe automaticamente esclusa (la variabile tempo è, in ogni caso, invisibile”).

D' altra parte essa descrive analiticamente la curvatura dello Spaziotempo in funzione di massa/energia e quindi rende “misurabile” se non “visibile” la IV dimensione.

Ed ancora una volta, a causa della limitatezza espressiva imposta dalla nostra tridimensionalità, ci si trova a descrivere la curvatura di una superficie (quindi 2D) immersa in uno spazio 3D, lasciando al calcolo tensoriale assoluto il compito di quantificarla.

Il tutto parte dall'idea di trasporto parallelo di un vettore lungo una curva chiusa che comporta la invarianza di modulo, direzione e verso in uno spazio euclideo.

E' il V Postulato di Euclide (da un punto P su di un piano è possibile tracciare una ed una sola parallela ad una retta data) che determina la identità del vettore trasportato tra posizione iniziale V_I finale V_F

Ben diversa la situazione quando trattasi di superficie curva immersa in uno spazio 3D: il vettore V_F presenta direzione e verso non coincidenti con il vettore iniziale.

FIG.9a

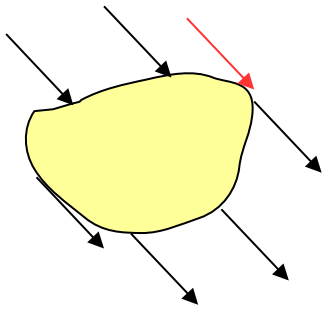
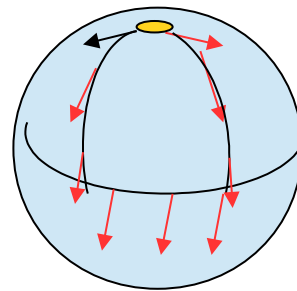


FIG.9b



Ora, dato che la definizione di parallelismo è riferibile solo ad un piano in uno spazio euclideo, l'idea base è quella di rendere localmente tale anche una superficie curva.

Di superfici curve ne esistono di due tipi: sviluppabili e non sviluppabili.

Le prime si riferiscono ad enti geometrici che possono essere trasformati in piani senza operare strappi o fori sulla superficie.

Tali superfici sono rigate, significando che su di esse può essere tracciata una retta (od un suo segmento); tipici esempi un cilindro od un cono.

FIG.10a

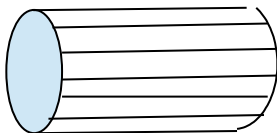
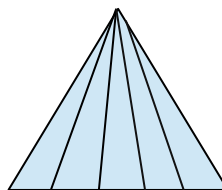
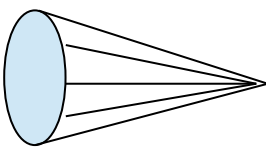
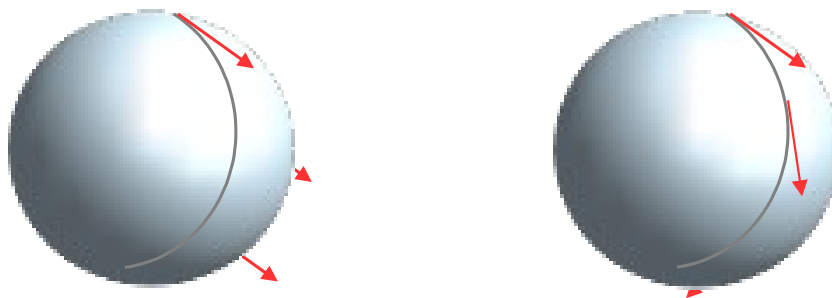


FIG.10b



Per superfici euclidee non piane si verifica la impossibilità del rispetto contemporaneo delle condizioni di parallelismo e superficialità (appartenenza alla superficie).



Parallelismo e mancanza di superficialità

Superficialità e mancanza di parallelismo

FIG.2

Con riferimento ad una superficie sferica si sposti il vettore V_1 lungo una geodetica (meridiani e paralleli per una sfera) di un tratto infinitesimo ds passando dal punto A al punto B.

La superficie sferica può approssimarsi ad un piano in un intorno $d\Sigma$ di A con un errore del II ordine; ne segue che ds appartiene sia al piano che alla sfera ed il trasporto parallelo può avvenire con modalità euclidee.

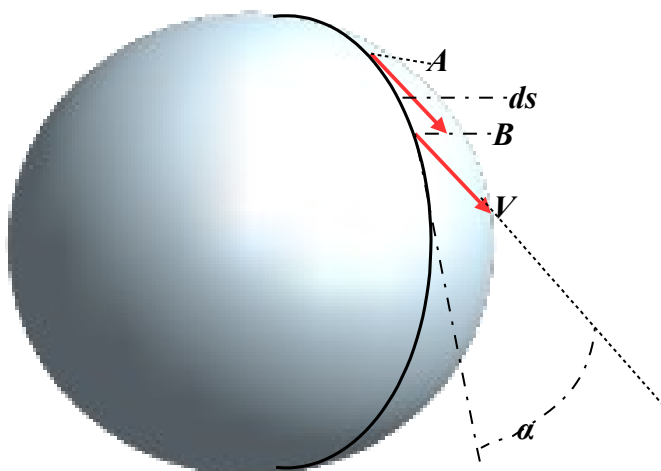


FIG.3

Il vettore V_1 trasportato parallelamente risulta ruotato di un angolo α rispetto alla tangente in B; se V_1 giace su di un piano a tangente alla superficie sferica, il vettore V_F post spostamento, giacerà sul piano b, ruotato rispetto ad a.

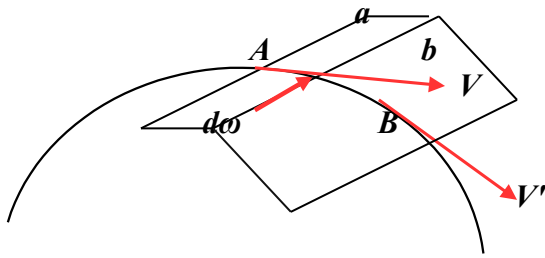
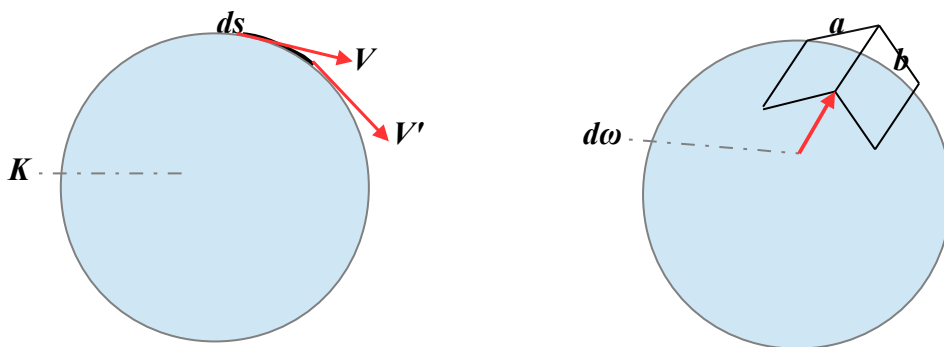


FIG.4

Il vettore rotazione = $d\omega$ rappresenta la rotazione del piano a rispetto al piano b; esso ha modulo Vds , direzione parallela all'asse di rotazione coincidente con l'intersezione dei piani a e b e verso corrispondente all'avanzamento di una vite destrorsa. Graficamente si ha:



ds, V e V' giacciono nel piano K

$d\omega$ è normale al piano K

FIG.5

L'equazione $(d\vec{V}) = \vec{V} \times (d\vec{\omega})$ (1.1)

rappresenta la variazione vettoriale subita da V a seguito della rotazione dei piani di giacenza. dV ha modulo $V \cdot d\omega$ e direzione normale a V ed a $d\omega$ quindi:

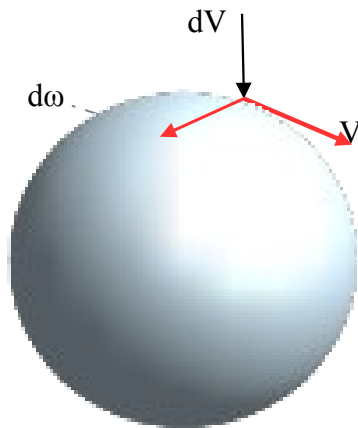


FIG.6

Quindi: $\vec{V}' = \vec{V} + (d\vec{V})$ (1.2)

la (2.1) ammette la seguente interpretazione grafica.

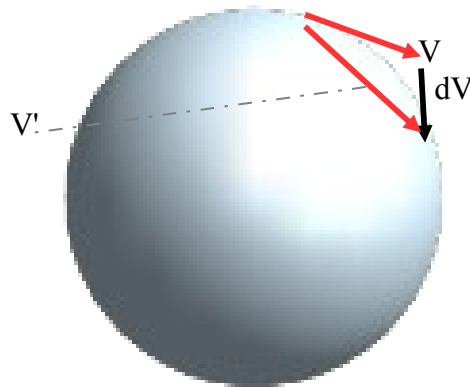


FIG.1.7

Lo spostamento del vettore V di un tratto ds lungo una geodetica comporta sia una rotazione che una variazione di modulo; V' rappresenta il vettore V post spostamento.

Si ricorda che il prodotto scalare di due vettori è la prodotto del modulo del primo per la proiezione del modulo del secondo sul primo, in caso di vettori ortogonali tale prodotto è sempre nullo.



Poiché dV e ds sono ortogonali si ha.

$$dV \cdot ds = 0$$

o, riferito alle componenti cartesiane dei due vettori:

$$dV_i \cdot ds_j = 0 \quad (i,j= 1,2,3)$$

La equazione $dV \cdot ds$ rappresenta l'equazione simbolica del parallelismo.

Conclusione: a seguito di uno spostamento differenziale δs lungo una geodetica, il vettore VP ruota di un angolo $d\omega$.

Integrando lungo una linea chiusa il vettore VQ risulterà orientato diversamente da VP ; l'angolo formato da VP e VQ può essere assunto come indicatore della curvatura della superficie di cui la linea chiusa è perimetro.

Nel rispetto del dichiarato obiettivo di fornire una descrizione “catastroficamente” divulgativa viene indicato esclusivamente il percorso logico-geometrico impiegato per la determinazione del Tensore di Curvatura di Riemann o, più specificatamente per quanto attiene la Relatività Generale, di Ricci

A livello puramente informativo l'equazione di campo della Relatività Generale recita:

$$R_{ij} - 1/2 g_{ij} R = \left(\frac{8\pi G}{c^4} \right) T_{ij}$$

con:

R_{ij} = tensore di Ricci

g_{ij} = tensore metrico ($i, j = 1, \dots, 4$)

R = scalare del tensore di Ricci

g_{ij} = tensore metrico (vedere pag 10 -(1.8))

G = costante gravitazionale

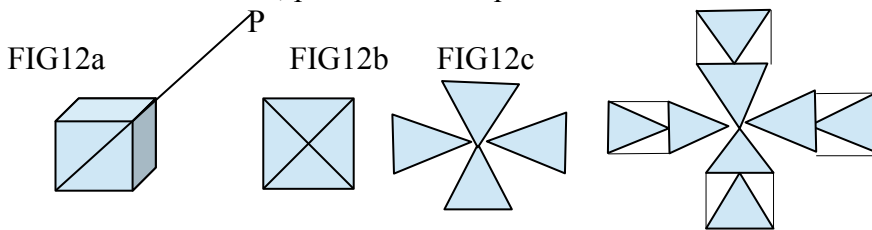
T_{ij} = tensore massa-energia

Di interesse circa la IV dimensione è il fatto che se ne possa calcolare la curvatura ma non se ne possa mostrare la proiezione in 3D; la figura che segue infatti mostra solo una superficie (2D) immersa in uno spazio 3D.

Congettura di indeterminazione della proiezione tra spazi n dimensionali

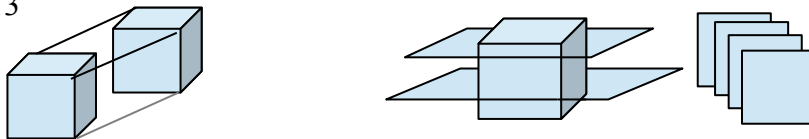
Molte sono le vie logico-geometriche per passare da una dimensione alla successiva (o alla precedente) : proiezione, traslazione, sezionamento. In ogni trasposizione, comunque eseguita con le tre tecniche logico-geometriche elencate, appare sempre un livello di indeterminazione.

Quale esempio la proiezione in 2D di un cubo, eseguita da un punto di proiezione appartenente ad un diametro del cubo, porta al solido quadridimensionale di cui a FIG.12



mentre una traslazione porta FIG 13 Per sezionamento si ottengono infiniti quadrati sovrapposti ognuno dei quali diviene, in 3D un cubo a sua volta

FIG.13



Per una superficie sferica si ottengono per sezionamento infinite circonferenze od ellissi in funzione della inclinazione del piano di sezionamento rispetto all'asse della sfera



Ad uno spazio n dimensionale corrispondono n gradi di libertà, cioè n variabili indipendenti attraverso le quali possono essere costruite

$$C_{n,2} = \frac{(n!)}{((n-2)! \cdot 2!)} \text{ figure geometriche bidimensionali}$$

$$C_{n,3} = \frac{(n!)}{((n-3)! \cdot 3!)} \text{ figure geometriche tridimensionali}$$

ecc.ecc. sino $C_{n,(n-2)} = C_{n,2}$

E' allora chiaro come, aumentando le dimensioni di uno spazio aumentino le figure geometriche in esso costruibili e, parallelamente, come non possa essere messa in corrispondenza biunivoca una figura geometrica n dimensionale con una appartenente ad uno spazio ad n+1 dimensioni.

Questa congettura decisamente euristica è parzialmente verificata dai limitati casi di cui ai paragrafi di cui a pag 3,6,7.

L'estensione ad ulteriori figure geometriche in 2 e 3 dimensioni può essere utile ad una parziale verifica della congettura mentre lo sviluppo di un teorema può venire condotto a partire dalle considerazioni sui gradi di libertà ammessi per ogni dimensione.