# L'IA ED IL PROBLEMA DELL'ARRESTO

## L'INTELLIGENZA ARTIFICIALE DA PITAGORA A GÖDEL ATTRAVERSO FERMAT, HILBERT, TURING E CHURCH

### INTRODUZIONE E CENNI STORIOGRAFICI

In una civiltà in cui il numero di autovetture circolanti approssima quello degli abitanti parlare di ARRESTO significa evocare immagini di ferodi, ganasce coloratissime e dischi lucidi.
Ma non è di questa categoria di "arresti" che intende parlare il presente scritto (e neppure di quello di un pericoloso latitante da parte delle forze dell'ordine), bensì del PROBLEMA DELL'ARRESTO del loop di un algoritmo ricorsivo.
Enunciato in tale modo il problema appare come "moderno" cioè riferito a tecnologie del XX e XXI secolo quali informatica, automazione o controlli automatici mentre ha oltre 2500 anni poiché a sollevarlo fu proprio Pitagora.
Ad essere precisi pare che la questione fosse nota ancor prima, da parte dei matematici babilonesi, cinesi e indiani, che, in forma non generalizzata, conoscevano almeno una terna di numeri soddisfacenti la nota relazione pitagorica; a Pitagora il merito di una dimostrazione geometrica; almeno così si dice.
Il primo a fornire una vera dimostrazione fu però Euclide:

*nei triangoli rettangoli il quadrato dell'angolo opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.*
Euclide, *Elementi*, I, 47

L'elenco di chi ha tentato una dimostrazione è decisamente lungo: Abu'l Wafa (persiano), Airy (inglese), Garfield (americano), ecc. ma la storia inizia a farsi interessante quando ci si pone la domanda di quanti siano i triangoli che soddisfano il Teorema.
Tale domanda coincide con la seguente:

*Quante sono le terne di numeri che elevati al quadrato soddisfano la relazione* $a^2 + b^2 = c^2$ *?*

La risposta è: sono infinite anche se, dalla scuola media in poi, ne ricordiamo solo una: (3,4,5)
Ed ecco alcune delle altre chiamate "terne pitagoriche primitive":
(5,12,13); (7,24,25), (8,15,17), (9,40,41), (11,60,61), (12,35,37), (13,84,85), ecc.
Il passo successivo nella storia dell'Arresto non fu di un matematico bensì di un dilettante; per la verità del "Re Dei Dilettanti": Pierre de Fermat.
Pierre de Fermat (1601-1665) fu avvocato, consigliere del Re nel Parlamento di Tolosa, politico di chiara fama, ma se oggi lo ricordiamo é per aver avanzato una ipotesi curiosa: l'Ultimo Teorema di Fermat.
Come dilettante non aveva una lunga schiera di matematici tra i suoi conoscenti, tranne forse Marsenne e Pascal, né pubblicava spesso i suoi lavori che pochi conoscevano ma che enunciavano spesso risultati importanti che, successivamente, venivano sempre dimostrati veri.
Quindi, quando scrisse, ai margini di una copia dell'*Arithmetica* di Diofanto:

*Più generalmente l'equazione* $a^n + b^n = c^n$ *per* $n > 2$ *non ammette soluzioni intere con a,b,c non nulli. Ho una notevole dimostrazione di questo teorema ma il margine di questo libro è troppo piccolo per poterla riportare"*

Il mondo dei matematici accettò le sue affermazioni.

Poiché fidarsi è bene ma non fidarsi è meglio una folta schiera di matematici cercò, nel tempo, una dimostrazione di quella che è meglio definire *Congettura di Fermat*; tra di essi: Eulero XVIII sec per n =3, Legendre 1798 per n =5, Lamé 1839 per n=7.

Poi un salto di due secoli sino al 1994 quando Andrew Wiles annunciò di avere la dimostrazione per n qualsiasi. Inizialmente la dimostrazione parve presentare alcune lacune che Wiles sistemò definitivamente nel 1998 quando fu accettata ufficialmente dall' International Mathematical Union e la Congettura di Fermat divenne finalmente il Teorema di Fermat- Wiles.

## ALGORITMI RICORSIVI

Per muovere un pesante carro si può ricorrere alla “forza bruta” aumentando la spinta oppure alla astuzia intelligente lubrificando al meglio le ruote.
Così per verificare la Congettura di Fermat per un predefinito valore di n si può ricorre all’applicazione di numeri naturali crescenti alla relazione analitica che la rappresenta oppure “uscire dal sistema” (su questo punto si ritornerà più oltre).
Quale esempio si voglia verificare la *Congettura* per n =2 (sapendo che è validabile) e per n = 3 (sapendo che non ammette soluzioni).
L'equazione $a^2 + b^2 = c^2$ viene verificata per tutti i Numeri Naturali ( per a=b=c=1 la verifica è banale) come segue:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a=2 | b=2 | c=2 | 4 + 4 > 4 | quindi c →3 | |
| a=2 | b=2 | c=3 | 4 + 4 < 9 | quindi a→3 | |
| a=3 | b=2 | c=3 | 9 + 4 > 9 | quindi c→4 | |
| a=3 | b=2 | c=4 | 9 + 4 < 16 | quindi a = 4 | |
| a=4 | b=2 | c= 4 | 16 + 4 > 16 | quindi b =3 | |
| a=4 | b=3 | c =16 | 16 + 9 > 16 | quindi c =5 | |
| a=4 | b=3 | c=5 | 16 + 9 = 25 | Arresto | |

L'algoritmo relativo può essere:
1. a,b,c numeri naturali scelti arbitrariamente
2. se $(a^2 + b^2) > c^2$
3. c → (c +1)
4. se $(a^2 +b^2) < c^2$
5. il minore tra a e b; a → (a+1) o b→(b +1)
6. se $(a^2 + b^2) = c^2$ arresto

Per n =3 il metodo non ammette mai l'arresto ovvero la la IV colonna mostrerà sempre il segno ≠ così come per ogni valore di n≠2.
Naturalmente la ricorsività è impiegabile anche per la soluzione di problemi non strettamente connessi con la Congettura di Fermat; ad esempio la costruzione di Frattali; tipico esempio il Frattale di Cantor.

---------- ------------------------------------------------- segmento lunghezza L
-------------------------- segmento 1/3 L
---------- segmento 1/9L
--- 1/27L
. 1/81L

ecc. ecc.
L'algoritmo è del tipo:
segmento di lunghezza L
calcolare 1/3 L
segmento 1/3 L

calcolare 1/3 di 1/3L
segmento (1/3 di 1/3L)
calcolare 1/3 di (1/3 di 1/3L)
….........................................
…............................................

Il processo ricorsivo non ha termine tendendo a zero la lunghezza dei segmenti per $n \to \infty$.
Praticamente ogni frattale ( Kock, Peano, Sierpinski, Mandelbrot, ecc) è riducibile ad un algoritmo ricorsivo analogamente a quanto mostrato per il frattale di Cantor.

A questo punto appare chiaramente l'importanza dell'Arresto per un algoritmo ricorsivo, importanza tanto maggiore quanto più complesso è l'algoritmo stesso.

**DA DAVID HILBERT AD ALAN TURING**

L' 8 agosto 1900 si tenne a Parigi la conferenza di apertura del Congresso Internazionale dei Matematici; ospite d'onore e relatore principale David Hilbert, il più famoso matematico dell'epoca.
Si racconta che tra i partecipanti corresse voce che Hilbert avrebbe annunciato la dimostrazione della Congettura di Fermat ma, con sorpresa di tutti, egli presentò i 23 problemi irrisolti (a quell'epoca) quale obiettivo delle ricerca matematica del XX secolo; tra di essi e precisamente al 10 posto, la Congettura di Fermat:

*Individuare un algoritmo che determini se una data equazione diofantea in n incognite abbia soluzione.*

In realtà la congettura di Fermat non è altro che un caso particolare di una equazione diofantea, cioè una equazione in cui le incognite siano n=4, precisamente a,b,c,n.
Si consideri l'equazione diofantea: $2y^2 - 4x - 3 = 0$ da risolversi per numeri naturali con il metodo della "forza bruta" ovvero per tentativi progressivi.

| $2y^2 - 4x - 3 = 0$ | $\rightarrow$ | $2y^2 - 4x = 3$ |
|---|---|---|
| $x = 1; y = 1$ | | $2 - 4 < 3$ |
| $x = 1; y = 2$ | | $8 - 4 > 3$ |
| $x = 2; y = 1$ | | $2 - 8 < 3$ |
| $x = 2; y = 2$ | | $8 - 8 < 3$ |
| $x = 3; y = 1$ | | $2 - 12 < 3$ |

…...........................................................................................
ecc. ecc.

Appare del tutto incerto l'eventuale arresto che si avrebbe all'apparire del segno = anziché > oppure <.
Qualora si voglia abbandonare il metodo delle "forza bruta" uscendo dal sistema della ricorsione si avrebbe:
$2y^2$ numero pari 4x numero pari $(2y^2 - 4x)$ numero pari in quanto somma di due pari.
Quindi $2y^2 - 4x$ (numero pari per ogni intero x e y) $\neq 3$ (dispari)
Un algoritmo ricorsivo non giungerebbe mai all'arresto mentre "uscendo dal sistema della ricorsione" e ragionando su parità o meno dei membri dell'equazione, si può concludere che essa non ammette soluzione.
Che Alan Turing possa ritenersi il padre fondatore dell'informatica ed il primo inventore del calcolo automatico è ragionevole, ma è proprio vero?
Almeno per quanto concerne i moderni calcolatori è impossibile non ricordare Wilhelm Schickard e la sua addizionatrice meccanica (1623), la famosa "Pascalina" di Blaise Pascal (1642), la macchina analitica di Charles Babbage (1823).

Infatti Alan Turing è stato, innanzi tutto, un logico-matematico ed il suo primo obiettivo pare essere stato rispondere al X quesito di Hilbert.
Infatti la macchina di Turing è solo teorica; composizione e funzionamento sono tanto noti e tanto facilmente reperibili in rete da rendere superflua una sua descrizione.
Si consideri la equazione diofantea:

$$2y^2 - 4x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad 2y^2 - 4x = 6$$

| | |
|---|---|
| x=1; y=1 | $2 - 4 = -2 \neq 6$ |
| x=1; y=2 | $8 - 4 = 4 \neq 6$ |
| x=2; y=1 | $2 - 8 = -6 \neq 6$ |
| x=2; y=2 | $8 - 8 = 0 \neq 6$ |

…...........................................................................................................

…..........................................................................................................

| | |
|---|---|
| x=3; y=3 | $18 - 12 = 6$ |

La macchina di Turing porterebbe al risultato in 10 steps mentre la equazione:

$$2y^2 - 4x - 5 = 0$$

porterebbe ad una reiterazione infinita, ovvero non si giungerebbe mai all'arresto (come dimostrato dall'analisi fuori sistema per numeri pari e dispari).
Vi è però una famosa ipotesi dovuta a Turing e Church che afferma:

*se un problema è risolvibile dalla mente umana allora esiterà una macchina di Turing in grado di risolverlo.*

Questa ipotesi implica che possa esistere una macchina di Turing in grado di gestire un algoritmo che simula un ragionamento "astuto ed intelligente" che, operando fuori dal sistema della ricorsione, possa stabilire se esisterà o meno un arresto nella ricorsione stessa.
In pratica questa è una ipotesi sulla possibilità realizzativa della nota IA (Intelligenza Artificiale).
Di IA vi sono 2 versioni possibili:

- IA Forte: ogni pensiero umano può essere tradotto in un algoritmo e può quindi essere simulato da una macchina di Turing particolarmente evoluta
- IA Debole: una macchina di Turing può simulare ogni azione del cervello umano attraverso un appropriato algoritmo ma la Comprensione di ciò che viene simulato è una proprietà non computabile ("La stanza Cinese")

Premessa indispensabile: il test di Turing presuppone che se il dialogo tra un essere umano ed un computer può essere confuso con quello tra due esseri umani allora il computer possiede intelligenza umana.
In tale caso il computer sarebbe in grado di riprodurre anche la comprensione del dialogo.
Quindi, più compiutamente, la IA Forte presuppone sia possibile individuare un algoritmo che riproduca sia la sintassi che la semantica di una proposizione mentre la IA debole demanda ad una attività umana non computabile la semantica.

**KURT GÖDEL E JOHN SEARLE**

Il problema della ipotesi IA forte risiede nei Teoremi di Gödel; il I Teorema di Incompletezza afferma che:

*in ogni teoria T in grado di rappresentare tutte le funzioni ricorsive primitive, se T è coerente è possibile costruire una proposizione sintatticamente corretta (quindi anche computabile) che non può essere dimostrata ne confutata utilizzando le regole di T, cioè all'interno di T.*

Il I teorema non indica quale siano le proposizioni sintatticamente corrette ma indecidibili, esso afferma solo che l'Aritmetica ne contiene sicuramente almeno una.
E' essenziale osservare che il Teorema di Incompletezza vale per ogni teoria affine a T, cioè per ogni teoria sufficientemente espressiva per descrivere i Numeri Naturali (ed in particolare il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica che recita: o*gni numero naturale maggiore di 1 o è un numero primo o si può esprimere come prodotto di numeri primi. Tale rappresentazione è unica, se si prescinde dall'ordine in cui compaiono i fattori*).
La precisazione di cui alla parentesi è dovuta al fatto che la dimostrazione di Gödel si basa sulla trasformazione di una proposizione metamatematica (quale: la formula G non è dimostrabile) in una formula aritmetica unica, utilizzante solo Numeri primi.
E' allora evidente che nessun algoritmo, pur estremamente complesso, così come nessuna mente umana per quanto intelligente risulterà in grado di decidere circa la soluzione di tale proposizione (indecidibile secondo Gödel); non trattasi di difficoltà computazionali o logiche bensì di ragioni intrinseche al sistema T impiegato (aritmetica assiomatica così come la conosciamo dalle scuole elementari e medie).
La domanda è: esistono veramente problemi aritmetici indimostrabili? Uno di essi è proprio il I problema di Hilbert, noto come "Ipotesi del Continuo": tra l'insieme dei Numeri Naturali noto come Insieme del Numerabile e l'Insieme dei Reali noto come Insieme del Continuo, esistono altri insiemi aventi Cardinalità (quantità di elementi dell'insieme) intermedia?
Ed ancora sono indimostrati e forse irresolubili, allo stato attuale della matematica, le equazioni di Navier Stokes, la congettura di Goldbach, la ipotesi di Riemann sulla funzione zeta, ecc.
II Teorema di Gödel recita:

*Nessun sistema, che sia abbastanza espressivo da contenere l'aritmetica, può essere utilizzato per dimostrare la sua stessa coerenza.*

Come appare evidente il II Teorema è il logico completamento del I che, si ricorda, ammetteva che un sistema T doveva essere coerente per contenere sicuramente almeno una proposizione indecidibile.
La IA Forte ammette quindi la computabilità e la comprensione (quindi anche la dimostrabilità) di qualsiasi pensiero umano, ad eccezione di almeno una proposizione (ignota) di cui non può decidere la dimostrabilità o la indimostrabilità; per contro la mente umana è in grado di "uscire dal sistema" impiegando la via di fuga del I Teorema di Godel: *"...... non può essere dimostrata ne confutata all'interno di T"*.
La IA debole ammette per contro, che la computabilità non generi intrinsecamente la comprensione; a tale proposito è emblematico il paradosso di Searle noto come paradosso della "stanza cinese".
Due stanze: in una c'è un cinese mentre nella seconda un computer in grado di rispondere adeguatamente ad ogni domanda posta (in cinese). Il cinese può ritenere giustamente che chi gli sta rispondendo sia un altro cinese. Secondo il test di Turing il computer possiede intelligenza umana.
Ora il computer viene sostituito da un umano che non conosce assolutamente la lingua cinese ma che, sulla base di un dizionario italiano- cinese e di un manuale che fornisce istruzioni è in grado di rispondere in cinese ad ogni specifica domanda pur senza capire assolutamente nulla del discorso in atto.
Tale individuo ha gestito correttamente la sintassi delle domande/risposte poste dal cinese senza conoscere la lingua e, pertanto senza avere acquisito la relativa semantica che rimane attributo essenzialmente umano.

**ORCHESTRED OBJECTIVE REDUCTION**

E' questa una ipotesi altamente speculativa che correla la comprensione, considerata attività specifica della mente umana non computabile, ad attività quantistiche di specifici componenti (microtubuli) dei neuroni del cervello.
La teoria Orch-Or è stata proposta da Roger Penrose, notissimo matematico, fisico e cosmologo inglese e da Stuart Hamenoff, medico, anestesista e neuro-ricercatore statunitense, con l'obiettivo di individuare dove e come fisicamente avesse luogo il processo della comprensione.
Orch-OR può allora essere definita come la terza via della IA, dopo la IA forte e la IA D ebole essa rappresenta la IA Quantistica che attribuisce ad una specifica parte del cervello umano (o meglio alle fluttuazioni quantistiche in esso contenute) caratteristiche non deterministiche e quindi non computabili tali da essere definibili come tipiche della Coscienza.
Sinteticamente: è la Coscienza umana che consente di elaborare attività cerebrali assolutamente non algoritmizzabili, quali sentimenti, immaginazione, ecc.; essa ha luogo in particolari filamenti di proteine (microtubuli) aventi dimensioni quantistiche