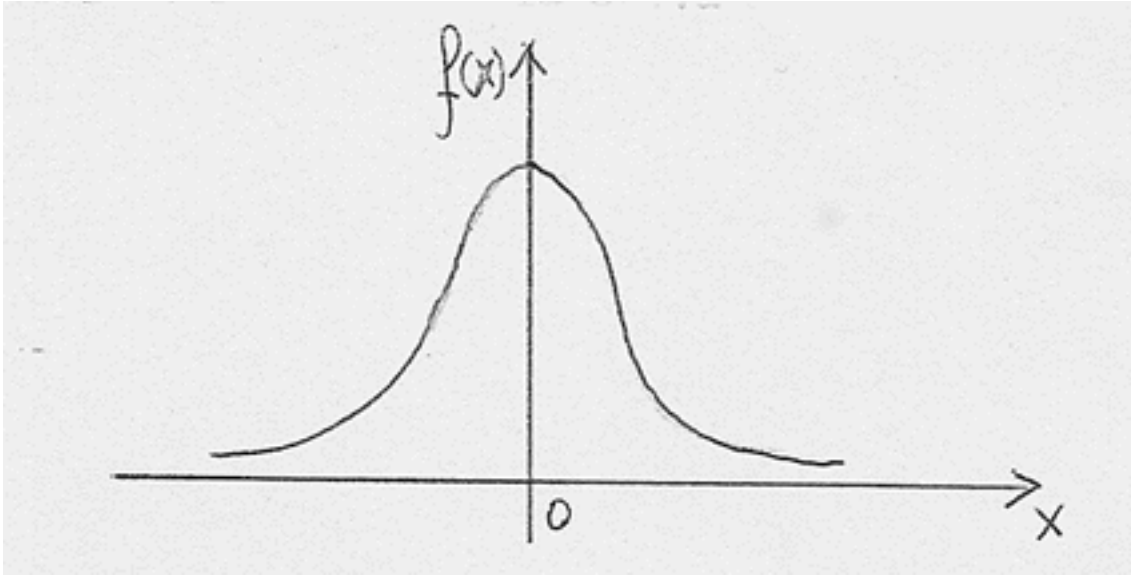


## APPENDICE 10

### La curva di Gauss ed alcuni integrali notevoli ad essa collegati

Ricordo l'espressione analitica ed il grafico della curva di Gauss o gaussiana:

$$f(x) = a \cdot e^{-bx^2}$$



Si tratta di una funzione pari della  $x$ , centrata in  $x = 0$ , e tendente a zero per  $x \rightarrow \pm\infty$ . La  $a$  è una costante di normalizzazione (poiché la gaussiana è una curva di distribuzione di probabilità e la probabilità matematica può valere al massimo 1, che corrisponde a certezza dell'evento, allora la  $a$  opera in modo che risulti  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ ) mentre  $b$  è una costante da cui dipende l'apertura della curva (quanto più grande è  $b$ , quanto più stretta è la curva di distribuzione). La denominazione di curva di distribuzione di probabilità deriva dal fatto che essa indica qual è la probabilità  $f(x)$  di trovare un certo valore eseguendo una misura  $x$ . Questo è il motivo per il quale la curva di Gauss si chiama anche curva degli errori: fornisce una indicazione della distribuzione degli errori nell'eseguire una data misura (conoscendo il valore di  $b$  si può anche conoscere la precisione con cui è stata effettuata la misura).

Connessi alla funzione di Gauss vi sono funzioni che sono prodotto di essa con altre funzioni. Non è semplice calcolarsi gli integrali di tali funzioni ed è pertanto utile darne un metodo di risoluzione.

Gli integrali che vogliamo risolvere sono del tipo:

$$J_n = \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-ax^2} dx$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; il primo di tali integrali è proprio l'integrale della curva di Gauss:

$$\mathcal{J}_0 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

Si tratta di un integrale improprio, dipendente da un parametro. Per poter eseguire l'integrazione occorre che la funzione integranda sia non negativa (condizione senz'altro verificata trattandosi di esponenziale) e convergente (condizione anch'essa verificata). Per fare l'integrazione, iniziamo con il porre:

$$\mathcal{J}_{OM} = \int_0^M e^{-ax^2} dx = \int_0^M e^{-ay^2} dy$$

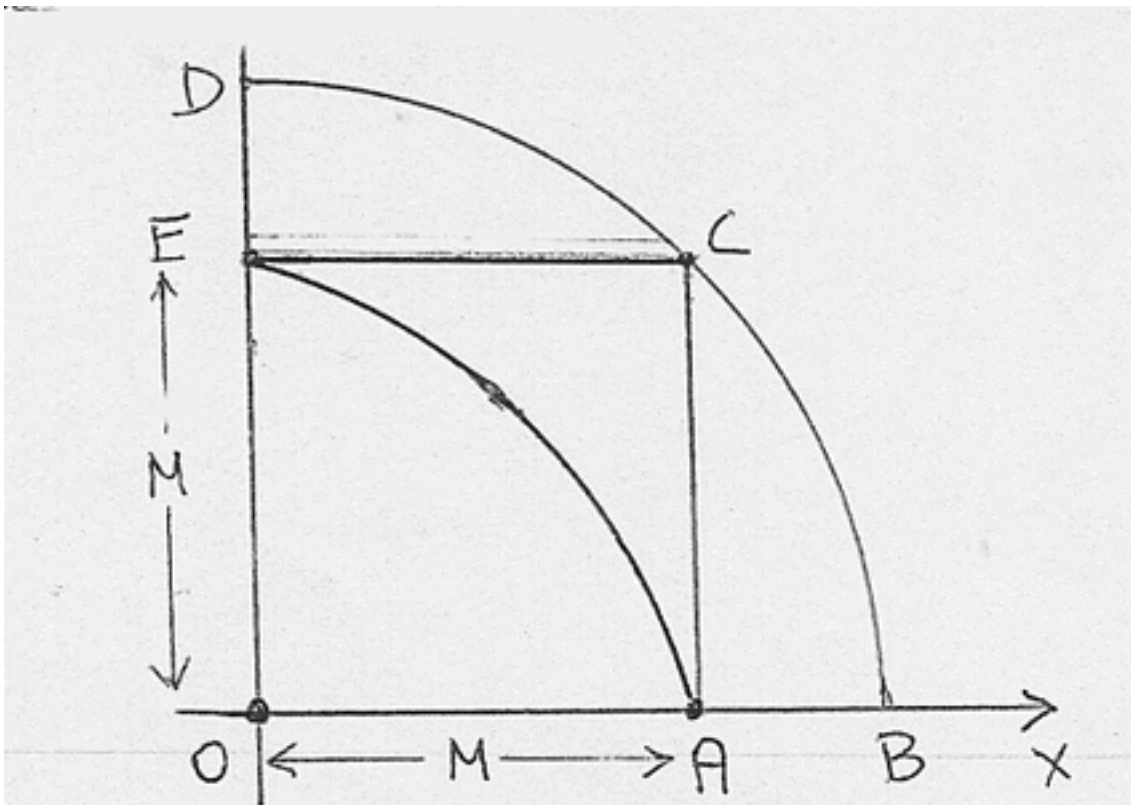
e sia:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{OM} = \mathcal{J}_0$$

il valore cercato per il nostro integrale. Si ha:

$$\mathcal{J}_{OM}^2 = \left( \int_0^M e^{-ax^2} dx \right) \left( \int_0^M e^{-ay^2} dy \right) = \iint_{Q_M} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{Q_M} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy$$

Dove  $Q_M$  è il quadrato di lato  $M$  mostrato in figura:

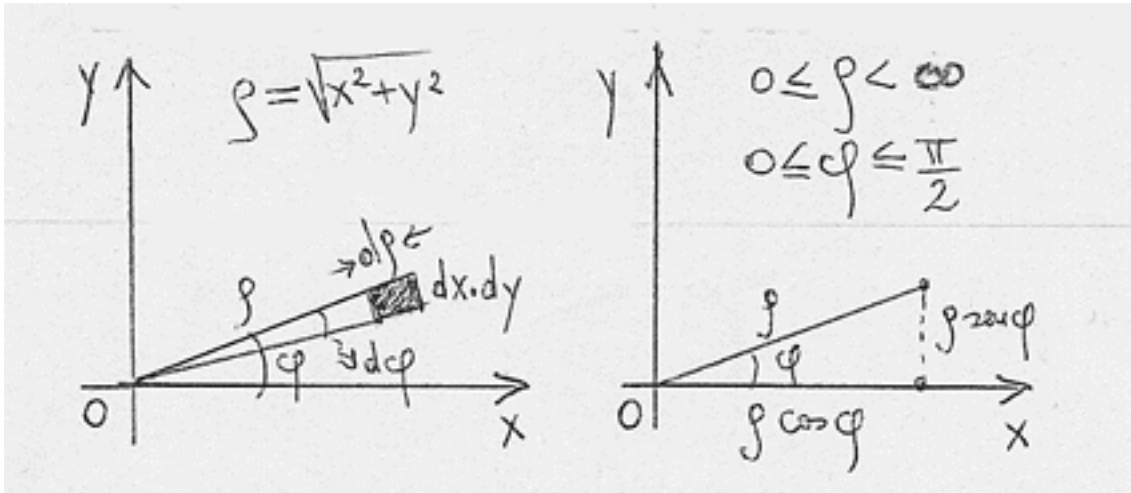


Poiché la funzione integranda è un esponenziale, essa è, come già detto, certamente positiva. Si ha quindi (riferendosi alla figura):

$$\iint_{C_M} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \leq \mathcal{J}^2_{OM} \leq \iint_{C_{M\sqrt{2}}} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy$$

dove  $C_M$  e  $C_{M\sqrt{2}}$  sono rispettivamente le circonferenze inscritta e circoscritta al dato quadrato  $Q_M$ .

Ricordando ora che l'elemento infinitesimo di area in coordinate cartesiane,  $dx \cdot dy$ , è, in coordinate polari, dato da (si veda figura):



$$dx \cdot dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| \cdot d\rho \cdot d\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cos \varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \cos \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin \varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \sin \varphi) \end{vmatrix} d\rho \cdot d\varphi =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} d\rho \cdot d\varphi = \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\rho \cdot d\varphi = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$$

per la catena di disuguaglianze con integrali doppi, si trova:

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^M \rho \cdot e^{-a\rho^2} d\rho \leq \mathcal{J}^2_{OM} \leq \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{M\sqrt{2}} \rho \cdot e^{-a\rho^2} d\rho.$$

Osservando ora l'immediatezza dell'integrale:

$$\int_0^M \rho \cdot e^{-a\rho^2} d\rho = -\frac{1}{2a} \int_0^M -2a\rho \cdot e^{-a\rho^2} d\rho = -\frac{1}{2a} \left[ e^{-a\rho^2} \right]_0^M$$

si trova, successivamente:

$$[\varphi]_b^{\tau/2} \left\{ -\frac{1}{2a} \left[ e^{-a\rho^2} \right]_o^M \right\} \leq \mathcal{J}^2_{\text{OM}} \leq [\varphi]_b^{\tau/2} \left\{ -\frac{1}{2a} \left[ e^{-a\rho^2} \right]_o^{M\sqrt{2}} \right\}$$

$$-\frac{\pi}{4} (1 - e^{-aM^2}) \leq \mathcal{J}^2_{\text{OM}} \leq -\frac{\pi}{4} (1 - e^{-2aM^2})$$

Cambiando segno e passando al limite per  $M \rightarrow \infty$  si ha:

$$\frac{\pi}{4a} \leq \mathcal{J}^2_{\text{O}} \leq \frac{\pi}{4a} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \leq \mathcal{J}_{\text{O}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

e, per il teorema del confronto:

$$\mathcal{J}_{\text{O}} = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

.....

L'integrale  $\mathcal{J}_1$  e cioè:

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-ax^2} dx$$

Si calcola in modo elementare. Si ha:

$$\mathcal{J}_1 = -\frac{1}{2a} \int_0^{\infty} -2ax \cdot e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} \left[ e^{-ax^2} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2a} (0 - 1)$$

e quindi:

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}.$$

.....

Vediamo come si ottengono gli integrali successivi cominciando con il considerarli come funzioni del parametro che in essi figura. Si vede subito allora che:

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{d}{da} \mathcal{J}_0 = -\frac{d}{da} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{d}{da} e^{-ax^2} dx = -\int_0^{\infty} -x^2 e^{-ax^2} dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$$

Ritornando alla prima uguaglianza e sostituendo ad  $\mathcal{J}_0$  il suo valore, si trova:

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{d}{da} \mathcal{J}_0 = -\frac{d}{da} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2\sqrt{a^3}} \right)$$

ed in definitiva:

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}.$$

.....  
Allo stesso modo:

$$\mathcal{J}_3 = -\frac{d}{da} \mathcal{J}_1 = -\frac{d}{da} \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a^2}$$

e quindi:

$$\mathcal{J}_3 = \int_0^{\infty} x^3 \cdot e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}.$$

.....  
Ed ancora:

$$\mathcal{J}_4 = \frac{d^2}{da^2} \mathcal{J}_0 = \frac{d^2}{da^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

e quindi:

$$\mathcal{J}_4 = \int_0^{\infty} x^4 \cdot e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}.$$

.....  
E così via.